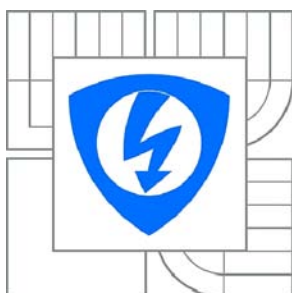




# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A  
KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND  
COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

## NUMERICKÝ VÝPOČET INVERZNÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

NUMERICAL INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

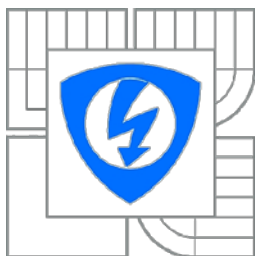
TOMÁŠ CEPEK

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. MARTIN ŠTUMPF

BRNO 2011



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav radioelektroniky

# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor  
Elektronika a sdělovací technika

**Student:** Tomáš Cepek  
**Ročník:** 3

**ID:** 106390  
**Akademický rok:** 2010/2011

**NÁZEV TÉMATU:**

## Numerický výpočet inverzní Laplaceovy transformace

### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Seznamte se základy teorie Laplaceovy transformace a prostudujte možnosti výpočtu inverzní Laplaceovy transformace. Zaměřte se na algoritmy založené na numerickém výpočtu Bromwichova integrálu pomocí Fourierových řad. Implementujte vybrané metody v programu Matlab. Tyto algoritmy vzájemně porovnejte a diskutujte jejich vlastnosti na vhodně zvolených příkladech.

### DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] MELKES, F. Matematika 2. Elektronické skriptum. Brno: FEKT VUT v Brně, 2005.

[2] DUFFY, D. G. Transform methods for solving partial differential equations, 2/E. Chapman & Hall/CRC, 2004.

<b>Termín zadání:</b>	8.2.2010	<b>Termín odevzdání:</b>	28.5.2010
<b>Vedoucí práce:</b>	Ing. Martin Štumpf		

prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida  
Předseda oborové rady

### UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

## **ABSTRAKT**

V práci jsou popsány možnosti výpočtu inverzní Laplaceovy transformace. Dále jsou popsány a odvozeny 3 algoritmy popisující numerický výpočet inverzní Laplaceovy transformace. Tyto 3 algoritmy jsou otestovány a popsány v prostředí Matlab na jednoduchých tabulkových příkladech a v poslední řadě na příkladech sdělovacího vedení. Numerické výsledky a vlastnosti testovaných algoritmů jsou porovnány a diskutovány.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Bromwichův integral, Dubner-Abateho algoritmus, Hosonův algoritmus, lichoběžníkové pravidlo, Simpsonovo pravidlo, obdélníkové pravidlo.

## **ABSTRACT**

In the work are described possibilities of a calculation of the inverse Laplace transform. Further are described and derived 3 algorithms describing the numerical inversion of the Laplace transform. These 3 algorithms are tested and described in the Matlab environment on the simple tabular examples and on the examples from a transmission line theory. Numerical results and features of all tested algorithms are compared and discussed.

## **KEYWORDS**

Bromwich integral, Dubner-Abate algorithm, Hosono algorithm, Trapezoidal rule, Midpoint rule, Simpson rule.

CEPEK, T. *Numerický výpočet inverzní Laplaceovy transformace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav radioelektroniky, 2011. 49 s. Bakalářská práce. Vedoucí práce: ing. Martin Štumpf.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma “Numerický výpočet inverzní Laplaceovy transformace“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních anebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne .....

.....

(podpis autora)

## **PODĚKOVÁNÍ**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Martinu Štumpfovi za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne .....

.....

(podpis autora)

# OBSAH

Seznam obrázků	ix
Seznam tabulek	xi
Úvod	1
1 MOŽNOSTI VÝPOČTU INVERZNÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE	2
1.1 Bromwichův integrál	2
1.1.1 Bromwichova integrační cesta	3
1.1.2 Výpočet Bromwichova integrálu	4
1.2 Výpočet pomocí slovníku	5
1.3 Heavisideův rozvoj	6
1.3.1 Nenásobné kořeny	6
1.3.2 Násobné kořeny	6
2 MODIFIKACE BROMWICHOVA INTEGRÁLU	7
2.1 Dubner-Abateho algoritmus	7
2.1.1 Odvození Dubner-Abateho algoritmu	7
2.2 Algoritmus založený na Simpsonově pravidlu	9
2.2.1 Odvození algoritmu založené na Simpsonově pravidlu	9
2.3 Hosonův algoritmus	11
2.3.1 Odvození Hosonova algoritmu	11
3 testování algoritmů na jednoduchých obrazech	12
3.1 Testování Dubner – Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku	12
3.2 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku	19
3.3 Testování algoritmu založeném na Simpsonově pravidle	24
3.4 Testování Dubner-Abateho algoritmu na lineární funkci	26
3.5 Testování Dubner-Abateho algoritmu na goniometrické funkci sinus	27
3.6 Testování Hosonoho algoritmu na goniometrické funkci sinus	30
3.7 Testování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle na goniometrické funkci	32
4 testování algoritmů na obrazech sdělovacího vedení	34

4.1	Vedení se zanedbatelným svodem i indukčností, spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel ). .....	34
4.1.1	Testování Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel ) .....	36
4.1.2	Testování Hosonoho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel ).....	38
4.1.3	Testování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel ).....	40
5	Závěr	42
	Literatura	43
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	44
	Seznam příloh	45



# SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1	Bromwichova integrační cesta.....	3
Obr. 2	Rozdělení funkce $f(x)$ na intervaly délky $h$ ( $\Delta x$ ) .....	8
Obr. 3	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 0.1$ a pro $N = 100$ . ....	13
Obr. 4	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 0.5$ a $N=100$ . ....	14
Obr. 5	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 1$ a $N = 100$ . ....	15
Obr. 6:	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku při $c = 0.5$ a $N=10$ . ....	16
Obr. 7	Testování Dubner – Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 1$ .....	17
Obr. 8	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku při $c = 0,5$ a $N = 10^4$ . ....	18
Obr. 9	Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 0,1$ a $N=10$ . ....	19
Obr. 10	Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku při $c = 0.1$ a $N=100$ . ....	20
Obr. 11	Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 0,3$ a $N = 100$ . ....	21
Obr. 12	Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro $c = 1$ a $N = 100$ . ....	22
Obr. 13	Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku při $c = 0,35$ a $N = 10^4$ .....	23
Obr. 14	Testování algoritmu odvozeného pomocí Simpsonova pravidla pro $c = 0.1$ a $N = 100$ . ....	24
Obr. 15	Testování algoritmu odvozeného pomocí Simpsonova pravidla pro $c = 0.5$ a $N = 100$ . ....	25
Obr. 16	Testování Dubner-Abateho algoritmu na lineární funkci pro $c = 0.5$ a $N = 100$ . ....	26
Obr. 17	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci $\sin(at)$ pro $c = 0.1$ a $N = 100$ . ....	27
Obr. 18	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci $\sin(at)$ pro $c = 0.3$ a $N=100$ a $a = 10$ .....	28
Obr. 19	Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci $\sin(at)$ pro $c = 0.8$ a $N =$	

	100 a $a = 10$ .....	29
Obr. 20	Testování Hosono algoritmu na funkci $f(t) = \sin(at)$ pro $c = 1$ a $N = 100$ a $a = 5$ . ....	30
Obr. 21	Testování Hosono algoritmu na funkci $f(t) = \sin(at)$ pro $c = 2$ a $N = 100$ a $a = 5$ . ....	31
Obr. 22	Testování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle na funkci $f(t) = \sin(at)$ pro $c = 1$ a $N = 100$ a $a = 4$ . ....	32
Obr. 29	Testování Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro $c = 1$ , $N = 100$ a $m = 10$ , délka vedení je $l = 5\text{m}$ a je zjištěn časový průběh napětí v bodě $x = 4.5\text{ m}$ . 36	
Obr. 30	Testování Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro $c = 1$ , $N = 100$ a $m = 10$ , $\omega = 4\pi$ délka vedení je $l = 5\text{m}$ a je zjištěn časový průběh napětí v bodě $x = 4.5\text{ m}$ .....	37
Obr. 31	Testování Hosono algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro $c = 1$ , $N = 100$ a $m = 10$ , $\omega = 4\pi$ délka vedení je $l = 5\text{m}$ a je zjištěn časový průběh napětí v bodě $x = 4.5\text{ m}$ .....	38
Obr. 32	Testování Hosono algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro $c = 1$ , $N = 100$ a $m = 10$ , $\omega = 4\pi$ délka vedení je $l = 5\text{m}$ a je zjištěn časový průběh napětí v bodě $x = 4.5\text{ m}$ .....	39
Obr. 33	Testování algoritmu založeném na Simpsonově pravidle na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro $c = 1$ , $N = 100$ a $m = 10$ , $\omega = 4\pi$ délka vedení je $l = 5\text{m}$ a je zjištěn časový průběh napětí v bodě $x = 4.5\text{ m}$ .....	40
Obr. 34	Testování algoritmu založeném na Simpsonově pravidle na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro $c = 1$ , $N = 100$ a $m = 10$ , $\omega = 4\pi$ délka vedení je $l = 5\text{m}$ a je zjištěn časový průběh napětí v bodě $x = 4.5\text{ m}$ .....	41

# SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Příklad slovníku Laplaceovy transformace : .....	5
---	---

# ÚVOD

Kvůli potřebě výpočtu předmětů inverzní Laplaceovy transformace, které nejsou známy v uzavřeném tvaru, bylo vyvinuto několik metod pro výpočet inverzní Laplaceovy transformace. Tyto metody nejvíce využívají Bromwichova integrálu a Fourierových řad [4].

Laplaceova transformace se používá například k řešení parciálních diferenciálních rovnic. Sám Leonard Euler zvažoval použití Laplaceovy transformace na řešení diferenciálních rovnic 2. řádu (1763 až 1769). Největší průlom ale udělal Oliver Heaviside, který zavedl operátorový počet a ten se dodnes užívá v elektrotechnice, zejména u přechodových dějů. Potom pokračoval výzkum dále a vědci chtěli Heavisideův počet spojit s Laplaceovou transformací. Jedním z nich byl Bromwich, který objevil vzorec na inverzní Laplaceovu transformaci (1.1) [4].

Obyčejné a parciální diferenciální rovnice popisují různé fyzikální jevy závislé na čase. Takovéto jevy jsou například kolísání proudu v RLC obvodu, mechanické oscilace na membráně nebo problémy šíření tepla. Aplikací Laplaceovy transformace na složité diferenciální rovnice, které popisují výše zmíněné fyzikální problémy, se řešená diferenciální rovnice zjednoduší na rovnici algebraickou, jejíž řešení transformujeme zpět do originální oblasti pomocí Laplaceovy inverze. Tato bakalářská práce se zabývá použitím různých metod pro *numerický* výpočet inverzní Laplaceovy transformace a jejich aplikací na různé druhy obrazů sdělovacích vedení či jednoduchých tabulkových obrazů. Použité algoritmy vycházejí z Bromwichova integrálu [4].

# 1 MOŽNOSTI VÝPOČTU INVERZNÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

## 1.1 Bromwichův integrál

Bromwichův integrál je hlavním klíčem pro získání originálu funkce  $f(t)$ , získaného z obrazu  $F(s)$  této funkce. Ve vědě a inženýrství bylo vyvinuto několik numerických metod používajících Bromwichův integrál za pomoci Fourierových řad. Nejjednodušším schématem pro výpočet inverzní Laplaceovy transformace je právě použití Fourierových řad. Bromwichův integrál je často označován jako Fourier-Mellinův integrál.

Bromwichův integrál má následující tvar [2]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.1)$$

,kde  $f(t)$  je originál funkce,  $i$  je označení imaginární složky,  $c$  je libovolná nezáporné celé číslo ležící napravo od všech singularit,  $F(s)$  je obraz originálu funkce,  $e$  je Eulerovo číslo,  $t$  je čas,  $s$  je parametr Laplaceovy transformace, definovaný jako komplexní proměnná.

Laplaceova transformace funkce  $f(t)$  je definována jako [4]:

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.2)$$

Symbol  $L$  značí Laplaceovu transformaci, kde funkce  $f = f(t)$  generuje novou funkci  $F(s) = L(f(t))$

Vzorec (1.2) lze přepsat do limitního tvaru, kdy [5]

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt \quad (1.3)$$

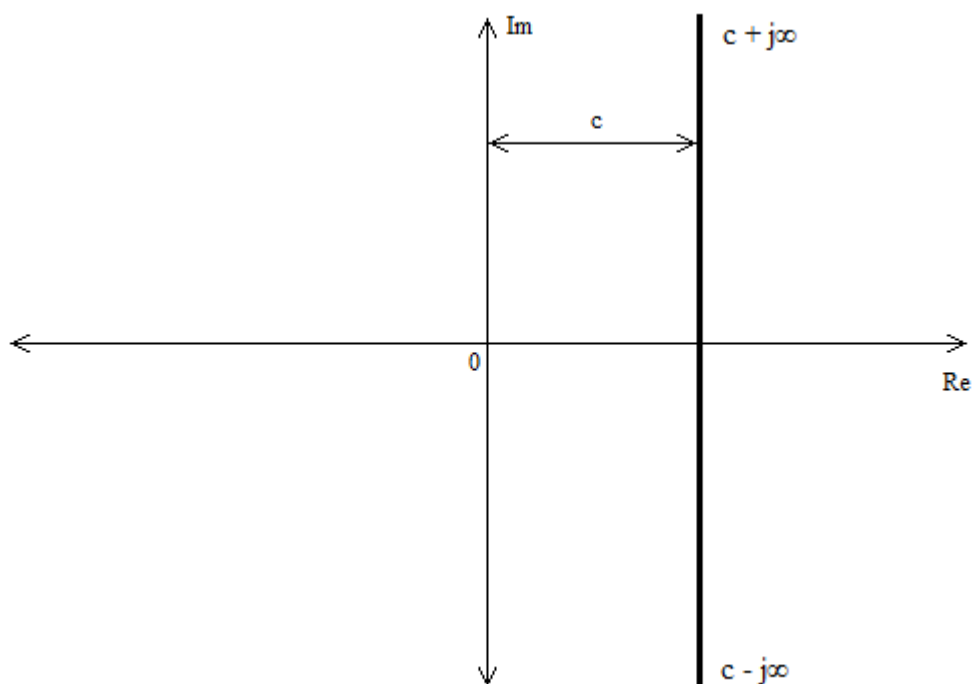
Pokud tato limita existuje, pak integrál konverguje (žádoucí případ) a pokud limita neexistuje integrál diverguje (nežádoucí případ). Divergence limity platí za předpokladu, že  $s \leq 0$ . V tomto případě již Laplaceovu transformaci nelze použít.

Parametr  $s$  si lze představit jako komplexní proměnnou, kdy  $s = x + yi$ . Z matematického hlediska, musí být  $s$  vhodně zvolen, aby byla zajištěna konvergence Laplaceova integrálu (1.3). V praxi je parametr  $s$  ale zanedbáván, protože diferenciální rovnice již mají výsledek známý.

V Bromwichově integrálu (1.1) je velmi důležitým parametrem složka  $e^{st}$ , jádro Laplaceovy transformace. Jelikož toto jádro má exponenciální charakter, tak výsledná

invertovaná funkce  $f(t)$  po aplikaci Bromwichova integrálu na obraz funkce  $F(s)$  může být v numerickém algoritmu degradována. Čím více totiž roste čas, tím více se tato složka začne projevovat a funkci  $f(t)$  již nelze rozeznat od originálu. Záleží ale na použitém obrazu, chování algoritmu a jeho rychlosti konvergence k hledanému výsledku.

### 1.1.1 Bromwichova integrační cesta



Obr. 1 Bromwichova integrační cesta

Bromwichovu integrační cestu lze chápat jako přímku, jež spojuje body  $c - j\infty$  a  $c + j\infty$ . Tato přímka je napravo od všech singulárních bodů vyšetřované funkce Obr 1. Číslo  $c$  určuje vzdálenost integrační cesty od imaginární osy  $Im$  a je vždy kladné.

### 1.1.2 Výpočet Bromwichova integrálu

Integrál je vedený po přímce  $p = s + j\omega$ , kde  $-\infty < \omega < \infty$ , lze počítat pomocí reziduí, potom platí [5]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \text{rez}(F(p)\exp(pt)) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Je-li znám obraz funkce  $F(s)$ , pak lze provést inverzní Laplaceovu transformaci pomocí reziduí. Nejprve se určí počet pólů obrazové funkce  $F(s)$ , potom se vypočtou všechna residua pro každý pól a nakonec dojde k součtu všech reziduí. Tento součet je potom výslednou funkcí  $f(t)$  a konečnou inverzí.

Bromwichův integrál vyjádřený Fourierovou řadou má tvar [3]:

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}[F(c + i\eta)] \cos(t\eta) d\eta = -\frac{2e^{ct}}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im}[F(c + i\eta)] \sin(t\eta) d\eta \quad (1.5)$$

,kde  $c$  je libovolné celé číslo, ležící napravo od všech singularit  $F(s)$ ,  $i$  je imaginární jednotka,  $e$  je Eulerovo číslo.

## 1.2 Výpočet pomocí slovníku

Další možností, jak vypočítat inverzní Laplaceovu transformaci a naopak je slovník, v němž jsou obsaženy již předem známé obrazy. Obraz může být přímo obsažen ve slovníku, potom je inverze velmi jednoduchá nebo se musí upravit, pokud se například jedná o racionální lomené funkce, je třeba tuto racionální lomenou funkci upravit pomocí rozkladu na parciální zlomky. Výsledek je pak dán součtem jednotlivých obrazů převedených pomocí slovníku. Jedná se o zjednodušení na několik lehčích výrazů, jejichž postupnou transformaci pomocí slovníku lze lehce převést obraz. Výhodou slovníku je snadná a rychlá inverze obrazu, jeho nevýhodou je naopak převod složitějších výrazů, na které musí být aplikována některá z metod Bromwichova integrálu nebo teorie residuí [7].

**Tab. 1 Příklad slovníku Laplaceovy transformace [2]:**

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$

Uvedený slovník je pouze krátký, v různých odborných matematických literaturách jsou slovníky mnohem rozsáhlejší, tento slouží pouze jako ukázka nebo pomůcka řešící jednoduché obrazy.



## 1.3 Heavisideův rozvoj

Veškeré uvedené vzorce této kapitoly jsou převzaty z [8]

Užívá se v případě, kdy obraz vyšetřované funkce  $F(s)$  je ve tvaru racionálně lomené funkce, jde tedy o výrazy typu

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s^1 + a_0} \quad (1.6)$$

,čili výrazy typu polynom lomeno polynomem.

Tento výraz lze rozložit na :

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s^1 + b_0}{a_n (s - p_n) \dots (s - p_2)(s - p_1)} \quad (1.7)$$

;  $p_1 \dots p_n$  jsou póly (singulární body – body nespojitosti) funkce  $F(s)$ .

### 1.3.1 Nenásobné kořeny :

Funkce  $F(s)$  je zapsána ve tvaru :

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n}. \quad (1.8)$$

Kde  $A_1, \dots, A_n$  jsou konstanty v čitatelích parciálních zlomků

$p_1, \dots, p_n$  jsou póly ve jmenovateli

### 1.3.2 Násobné kořeny :

Funkce  $F(s)$  je ve tvaru :

$$F(s) = \frac{M(s)}{a_n (s - p_1)^k (s - p_2)(s - p_3)} \quad (1.9)$$

Rozložením této funkce pomocí rozkladu na parciální zlomky se výraz změní na :

$$F(s) = \frac{B_1}{s - p_1} + \frac{B_2}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{B_k}{s - p_k} + \frac{A_1}{s - p_2} + \frac{A_2}{s - p_3} + \dots + \frac{A_i}{s - p_i} \quad (1.10)$$

Kde  $A_i$  a  $B_k$  jsou konstanty v čitateli

$p_1, p_2, \dots, p_n, p_k$  jsou póly ve jmenovateli

## 2 MODIFIKACE BROMWICHOVA INTEGRÁLU

Metody sloužící k numerickému výpočtu inverzní Laplaceovy transformace využívají hlavně Bromwichova integrálu, jak bylo popsáno v kapitole 1.1. Na základě modifikace vzorce (1.5), kde je Bromwichův integrál není nic jiného než přepis pomocí Fourierovy řady, lze odvodit několik metod, které využívají numerických metod v kombinaci s Bromwichovým integrálem. Jsou to například lichoběžníkové, Simpsonovo nebo obdélníkové pravidlo. Tato kapitola bude hovořit o těchto metodách[3].

Tato metoda má dva důvody pro numerický výpočet efektivním způsobem. Prvním důvodem je rychlejší zpracování na číslicových počítačích. Druhým důvodem je jednoduchá metoda, která vyžaduje poměrně minimum programovacího úsilí, protože výsledná inverzní funkce se dá vyjádřit jako Fourierova řada s funkcí kosinus nebo sinus s koeficienty s vhodnými hodnotami. Na začátku se provede omezení funkce  $f(t)$  tak, aby se stala reálnou funkcí [1]:

$$\operatorname{Re}\{F(s)\} = \int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) \cos wt \, dt \quad (2.1)$$

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(s)\} \cos wt \, dt \quad (2.2)$$

,kde  $s = a + i\omega$

Veškeré níže uvedené vzorce této kapitoly byly odvozeny pomocí literatur [3] a [6]

### 2.1 Dubner-Abateho algoritmus

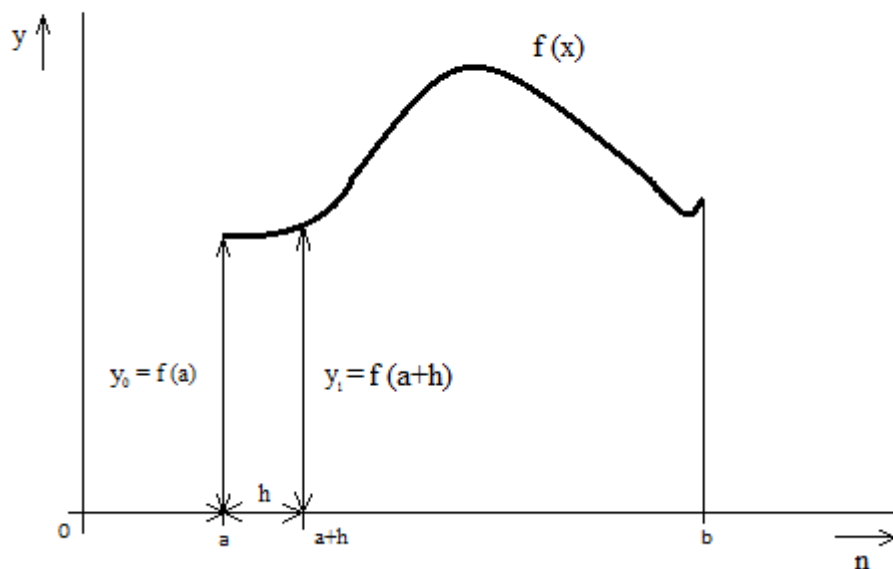
Tento algoritmus byl odvozen z kombinace rovnice (1.5) a lichoběžníkového pravidla. Dosazením lichoběžníkového pravidla z metod pro numerické integrování do rovnice (1.5) dojde k převedení složitého integrálu na algebraický výraz se sumou a tím k snadnému výpočtu inverzní Laplaceovy transformace.

#### 2.1.1 Odvození Dubner-Abateho algoritmu

Lichoběžníkové pravidlo má tvar [6]:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \quad (2.3)$$

$$\text{,kde } h = \frac{(b-a)}{n} \text{ a } x_k = a + kh; \, k = 0; 1; 2; \dots n \quad (2.4)$$



Obr. 2 Rozdělení funkce  $f(x)$  na intervaly délky  $h$  ( $\Delta x$ )

Metoda spočívá v rozdělení nějaké spojité funkce na  $n$  částečných intervalů délky  $h$ . Pro jednotlivé body  $y_0 \dots y_n$  funkce  $f(x)$ , rozdělené na podintervaly, platí:

$$1.) y_0 = \frac{h}{2} f_0 \quad 2.) y_1 = \frac{h}{2} \cdot 2f_1 = h \cdot f_1 \quad 3.) y_2 = \frac{h}{2} \cdot 2f_2 = h \cdot f_2 \dots \quad (2.5)$$

Označením  $h = \Delta x$  přejdou tyto výrazy na vztahy :

$$1.) y_0 = \frac{\Delta x}{2} f_0 \quad 2.) y_1 = \frac{\Delta x}{2} \cdot 2f_1 = \Delta x \cdot f_1 \quad 3.) y_2 = \frac{\Delta x}{2} \cdot 2f_2 = \Delta x \cdot f_2 \dots \quad (2.6)$$

Dosazením výrazů do rovnice (1.5), pouze pro její kosinusový tvar, dojde ke zkompletování lichoběžníkového pravidla a Bromwichova integrálu vyjádřeného pomocí Fourierovy kosinusové transformace do tvaru Dubner-Abateho algoritmu. Čili pro jednotlivé  $y_0 \dots y_n$  platí substituce  $\Delta x = \Delta \eta$ , protože Bromwichův integrál vyjádřený Fourierovou řadou byl integrovaný podle  $\eta$ . Uvedené funkční hodnoty v jednotlivých intervalech  $\Delta x$  přejdou do tvarů :

$$\begin{aligned} 1.) y_0 &= \text{Re}(F(c)) \cdot \cos(0\eta) = \text{Re}(F(c)) \\ 2.) y_1 &= \text{Re}(F(c + i\Delta\eta)) \cdot \cos(t\Delta\eta) \\ 3.) y_2 &= \text{Re}(F(c + 2i\Delta\eta)) \cdot \cos(2t\Delta\eta) \\ 4.) &\dots \end{aligned}$$

Sečtením těchto nových hodnot  $y_0 \dots y_n$  a dosazením do lichoběžníkového pravidla za předpokladu substituce  $\Delta x = \Delta \eta$  dojde ke konečnému převodu rovnice (1.5) do tvaru:

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{\pi} \cdot \frac{\Delta \eta}{2} \text{Re}(F(c)) + \frac{2e^{ct}}{\pi} \cdot \Delta \eta \text{Re}(F(c + i\Delta\eta)) \cos(t\Delta\eta) \dots \quad (2.7)$$

Funkci  $f(t)$  lze přepsat do výrazu se sumou, protože hodnota  $f(0) = \frac{\Delta\eta}{2} \cdot y_0$  se dá označit jako střední hodnota, jelikož v dalších sčítancích už jsou jen dvojnásobky funkčních hodnot  $f(1)...f(n-1)$ . Výraz se sumou lze tedy přepsat do tvaru za předpokladu substituce  $A = 2ct$  a  $\Delta\eta = \frac{\pi}{2t}$  :

$$f(t) = \frac{e^{A/2}}{2t} \operatorname{Re} \left[ F \left( \frac{A}{2t} \right) \right] + \frac{e^{A/2}}{t} \sum_{n=1}^N (-1)^n \operatorname{Re} \left[ F \left( \frac{A + 2n\pi i}{2t} \right) \right] \quad (2.8)$$

Výraz  $(-1)^n$  představuje pouze přepis výrazu  $\cos(t\Delta\eta)$  za substituce  $\Delta\eta = \frac{\pi}{2t}$ . Dosazením této substituce do rovnice kosinu, dojde k odstranění času a hodnota v něm se mění jako  $n$  násobek  $\frac{\pi}{2}$ . Protože  $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , dojde k odstranění všech lichých složek a zbydou pouze ty sudé, které obsahují výraz  $\cos(n\pi)$ , což je vlastně přepis výrazu  $(-1)^n$ , protože kosinus se pohybuje v tomto případě pouze na hodnotách  $\langle -1; 1 \rangle$ .

## 2.2 Algoritmus založený na Simpsonově pravidlu

Algoritmus je velmi podobný s lichoběžníkovým pravidlem, ale jeho chování je jiné, protože má jiný tvar. Dosazením Simpsonova pravidla z numerických metod do (1.5) dojde k převedení složitěho integrálu na algebraický výraz a tím k jednoduššímu výpočtu inverzní Laplaceovy transformace, obdobně jako u Dubner-Abateho algoritmu.

Tento algoritmus byl odvozen autorem této bakalářské práce.

### 2.2.1 Odvození algoritmu založené na Simpsonově pravidlu

Simpsonovo pravidlo má tvar [6]:

$$y = \int_a^b f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n) \quad (2.9)$$

,kde  $y_0...y_n$  jsou jednotlivé funkční body spojitě funkce,  $\Delta x$  je délka intervalu funkce  $f(x)$ , rozdělené na  $n$  intervalů této délky  $\Delta x = h$ . Pro jednotlivé body funkce  $f(x)$  platí :

$$1.) y_0 = \frac{\Delta x}{3} f_0 \quad 2.) y_1 = \frac{\Delta x}{3} \cdot 4f_1 = \Delta x \cdot \frac{4}{3} f_1 \quad 3.) y_2 = \frac{\Delta x}{3} \cdot 2f_2 = \Delta x \cdot \frac{2}{3} f_2 \dots \quad (2.10)$$

Z uvedeného vzorce (2.9) je vidět, že první člen  $f_0$  je vynásoben výrazem  $\frac{\Delta x}{3}$  a ostatní členy jsou násobeny poměrem  $\Delta x$  podle toho, jestli jde o sudou funkční hodnotu

$f_n$  nebo lichou funkční hodnotu  $f_n$ . Lichá funkční hodnota  $f_n$  je vynásobena poměrem  $\frac{4}{3} \cdot \Delta x$  a sudá funkční hodnota  $f_n$  je vynásobena poměrem  $\frac{2}{3} \cdot \Delta x$ .

Dosažením Simpsonova pravidla do rovnice (1.5), pro její kosinusový tvar, dojde ke spojení Simpsonova pravidla a Bromwichova integrálu a tím k usnadnění výpočtu inverzní Laplaceovy transformace. Jednotlivé hodnoty funkce  $f(x)$  ( $y_0 \dots y_n$ ) přejdou do tvarů :

$$1.) y_0 = \operatorname{Re}(F(c)) \cdot \cos(0\eta) = \operatorname{Re}(F(c))$$

$$2.) y_1 = \operatorname{Re}(F(c + i\Delta\eta)) \cdot \cos(t\Delta\eta)$$

$$3.) y_2 = \operatorname{Re}(F(c + 2i\Delta\eta)) \cdot \cos(2t\Delta\eta) \dots$$

, což jsou tvary stejné jako u lichoběžníkového pravidla.

Sečtením těchto hodnot  $y_0 \dots y_n$  dojde k sečtení výrazů v závorce rovnice (2.9), postupným vynásobením výrazů v závorce podle toho, jestli jde o sudý nebo lichý vzorek a nakonec k vynásobení výrazem  $\frac{\Delta x}{3}$ , vzorec (1.5) pak přejde do tvaru :

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{2e^{ct}}{\pi} \cdot \frac{\Delta\eta}{3} \cdot \operatorname{Re}\{F(c)\} + \frac{2e^{ct}}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \Delta\eta \cdot \operatorname{Re}\{F(c + i\Delta\eta)\} \cdot \cos(t\Delta\eta) + \\ & + \frac{2e^{ct}}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \Delta\eta \cdot \operatorname{Re}\{F(c + 2i\Delta\eta)\} \cdot \cos(2t\Delta\eta) + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Za substituce  $A = 2ct$  a  $\Delta\eta = \frac{\pi}{2t}$ , dojde k převodu rovnice (2.11) na výraz :

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{2e^{A/2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t}\right)\right\} + \frac{2e^{A/2}}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi}{2t} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t} + i\frac{\pi}{2t}\right)\right\} \cdot \cos\left(t\frac{\pi}{2t}\right) + \\ & + \frac{2e^{A/2}}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \frac{\pi}{2t} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t} + 2i\frac{\pi}{2t}\right)\right\} \cdot \cos\left(2t\frac{\pi}{2t}\right) + \dots \\ f(t) = & \frac{e^{A/2}}{3t} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t}\right)\right\} + \frac{4e^{A/2}}{3t} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t} + i\frac{\pi}{2t}\right)\right\} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \frac{2e^{A/2}}{3t} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t} + i\frac{\pi}{t}\right)\right\} \cdot \cos(\pi) + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Opět je vidět, že liché složky jsou odstraněny, protože  $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Čili všechny složky, které jsou násobeny  $\frac{4}{3}$  v rovnici (2.11) jsou automaticky anulovány. Proto výraz (2.12) přejde na snadnější zápis se sumou :

$$f(t) = \frac{e^{A/2}}{3t} \cdot \operatorname{Re}\left\{F\left(\frac{A}{2t}\right)\right\} + \frac{2e^{A/2}}{3t} \sum_{n=1}^N (-1)^n \operatorname{Re}\left[F\left(\frac{A}{2t} + \frac{2n\pi i}{2t}\right)\right] \quad (2.13)$$

## 2.3 Hosonův algoritmus

Tento algoritmus byl vytvořen z kombinace rovnice (1.5) – Bromwichova integrálu v sinusovém tvaru a obdélníkového pravidla podle japonského vědce jménem Hosono. V algoritmu je obsažena imaginární složka, což je způsobeno sinusovým tvarem Bromwichova integrálu.

### 2.3.1 Odvození Hosonova algoritmu

Obdélníkové pravidlo má tvar :

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x \cdot (f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n) \quad (2.14)$$

Opět dojde k rozdělení funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a;b \rangle$  na podintervaly délky  $\Delta x$ .

Pro jednotlivé hodnoty  $y_0 \dots y_n$  intervalu  $\langle a;b \rangle$  platí :

$$1.) y_0 = \Delta x \cdot f_0 \quad 2.) y_1 = \Delta x \cdot f_1 \quad 3.) y_2 = \Delta x \cdot f_2 \dots \quad (2.15)$$

Je vidět, že všechny funkční hodnoty intervalu  $\langle a;b \rangle$  jsou vynásobeny pouze hodnotou, kterou byla funkce  $f(x)$  rozdělena a to hodnotou  $\Delta x$ .

Dosazením těchto hodnot  $y_0 \dots y_n$  z obdélníkového pravidla (2.14) do rovnice (1.5) v sinusovém tvaru dostanou jednotlivé hodnoty funkce  $f(x)$  ( $y_0 \dots y_n$ ) tvar :

$$\begin{aligned} 1.) y_0 &= \text{Im}(F(c)) \cdot \sin(0\eta) = 0 \\ 2.) y_1 &= \text{Im}(F(c + i\Delta\eta)) \cdot \sin(t\Delta\eta) \\ 3.) y_2 &= \text{Im}(F(c + 2i\Delta\eta)) \cdot \sin(2t\Delta\eta) \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Je vidět, že střední hodnota funkce  $f(x)$   $y_0$  je nulová, je to způsobeno indexem  $n=0$  v sinusu, který je obsažen v sadě výrazů (2.5)

Sečtením jednotlivých výrazů  $y_0 \dots y_n$  funkce  $f(x)$  dojde ke zkompletování obdélníkového pravidla a Bromwichova integrálu v sinusovém tvaru na tvar :

$$f(t) = -\frac{2e^{ct}}{\pi} \cdot \{ \text{Im}[F(c + i\Delta\eta) \cdot \sin(t\Delta\eta)] + \text{Im}[F(c + 2i\Delta\eta) \cdot \sin(2t\Delta\eta)] + \dots \} \quad (2.17)$$

Opět dojde ke substituci  $A = 2ct$  a  $\Delta\eta = \frac{\pi}{2t}$  jako u lichoběžníkového nebo

Simpsonova pravidla a tím k převodu rovnice (2.6) na zápis :

$$f(t) = \frac{e^{A/2}}{t} \cdot \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot \text{Im} \left\{ F \left[ \frac{A + (2n-1)\pi i}{2t} \right] \right\} \quad (2.18)$$

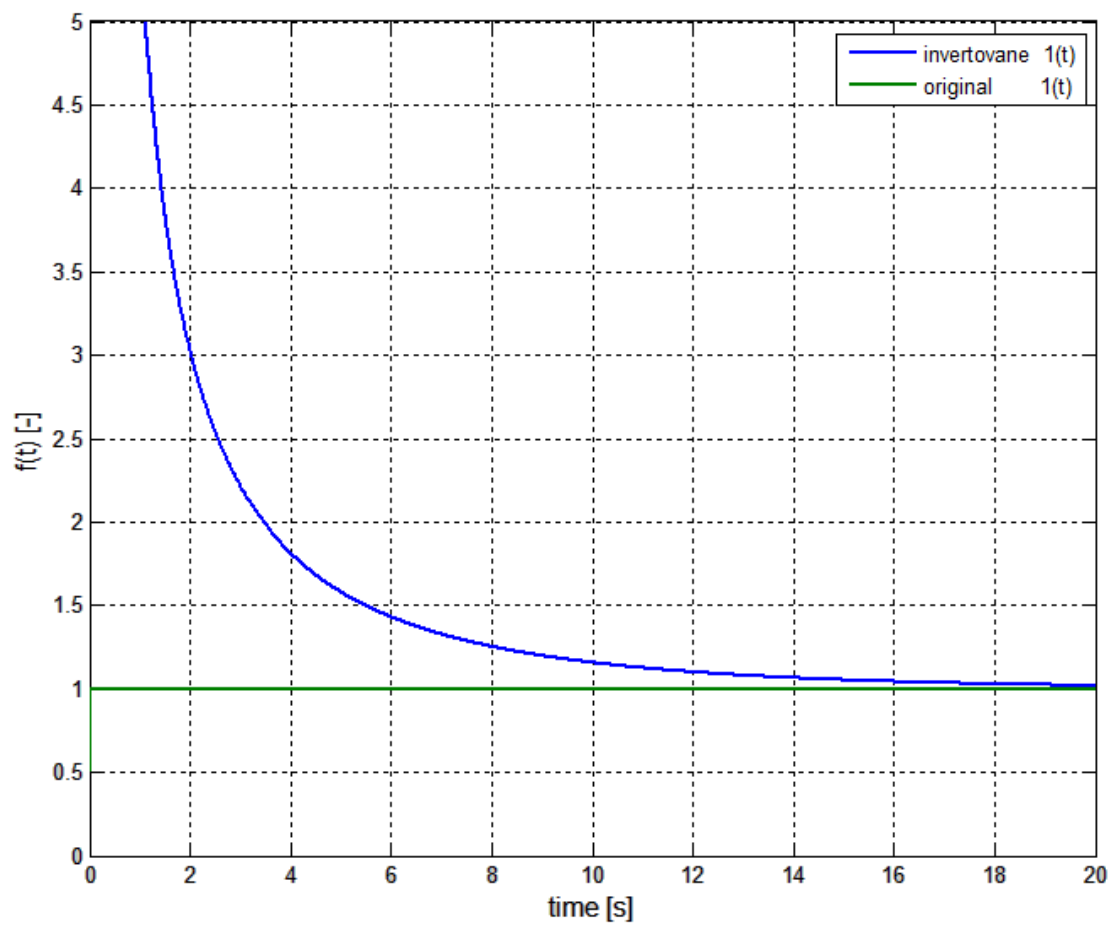
### 3 TESTOVÁNÍ ALGORITMŮ NA JEDNODUCHÝCH OBRAZECH

Tato kapitola se zabývá testováním odvozených algoritmů z kapitoly 2 na jednoduchých, již známých obrazech z Laplaceova slovníku. Jedná se například o funkce jednotkového skoku, lineární funkce nebo jednoduché funkce sinus či kosinus v Laplaceově obrazu. Jednotlivé obrazy v Laplaceově tvaru jsou většinou algebraické výrazy, proto se s nimi dobře pracuje.

Ve všech níže uvedených grafech ( obr. 3 až 22 ) je zeleným grafem originál testované funkce a modře je zvýrazněna invertovaná funkce  $f(t)$ , na které byl daný algoritmus testován.

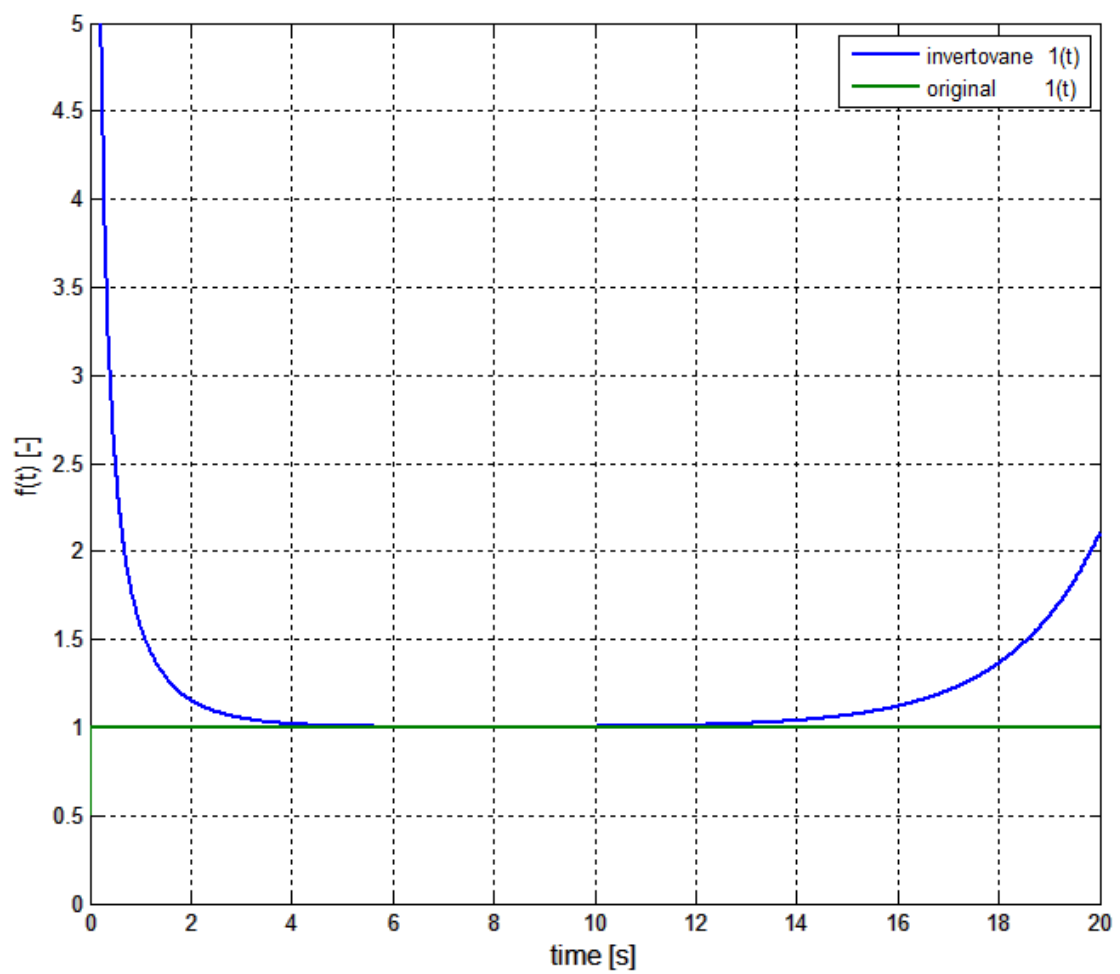
#### 3.1 Testování Dubner – Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku

Tato kapitola se zabývá testováním Dubner-Abateho algoritmu na nejzákladnější funkci a to funkci jednotkového skoku. Ukazuje, co se děje s invertovanou funkcí  $f(t)$  při změně konstanty  $c$  v malých či velkých hodnotách nebo změně počtu opakování algoritmu  $N$ . Veškeré obrázky jsou simulovány v programu `matlab`. Program `Matlab` má v sobě již zabudovanou funkci jednotkového skoku a tou je funkce `heaviside(x)`. X zde může nabývat jakýchkoliv hodnot, funkce totiž pro jakékoliv  $x$  vrátí vždy hodnotu 1.

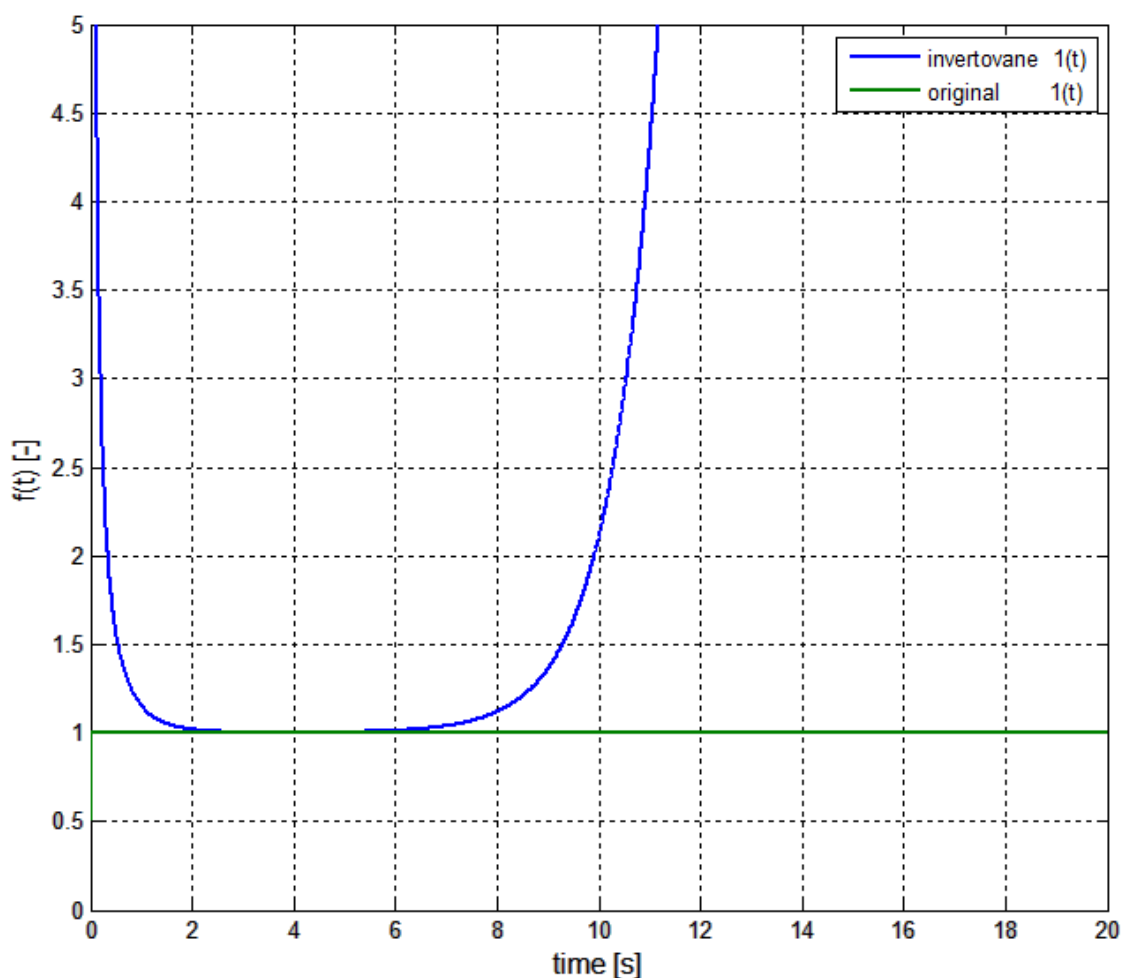


Obr. 3 Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 0.1$  a pro  $N = 100$ .





Obr. 4 Testování Dubner–Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 0.5$  a  $N=100$ .

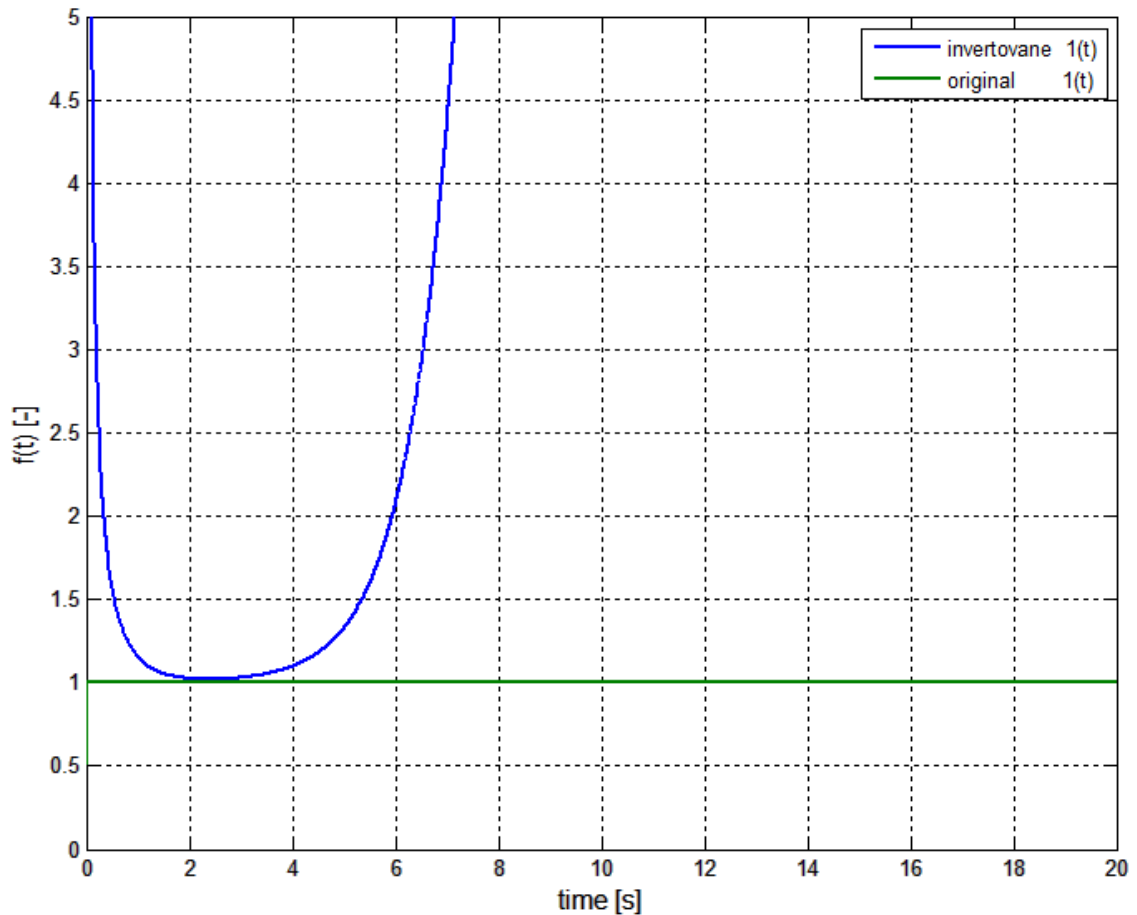


Obr. 5 Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 1$  a  $N = 100$ .

Obr. 3 až 5 ukazují na testování Dubner-Abateho algoritmu pro změnu konstanty  $c$  pro hodnoty  $c = 0,1; 0,5; 1$  funkce jednotkového skoku.

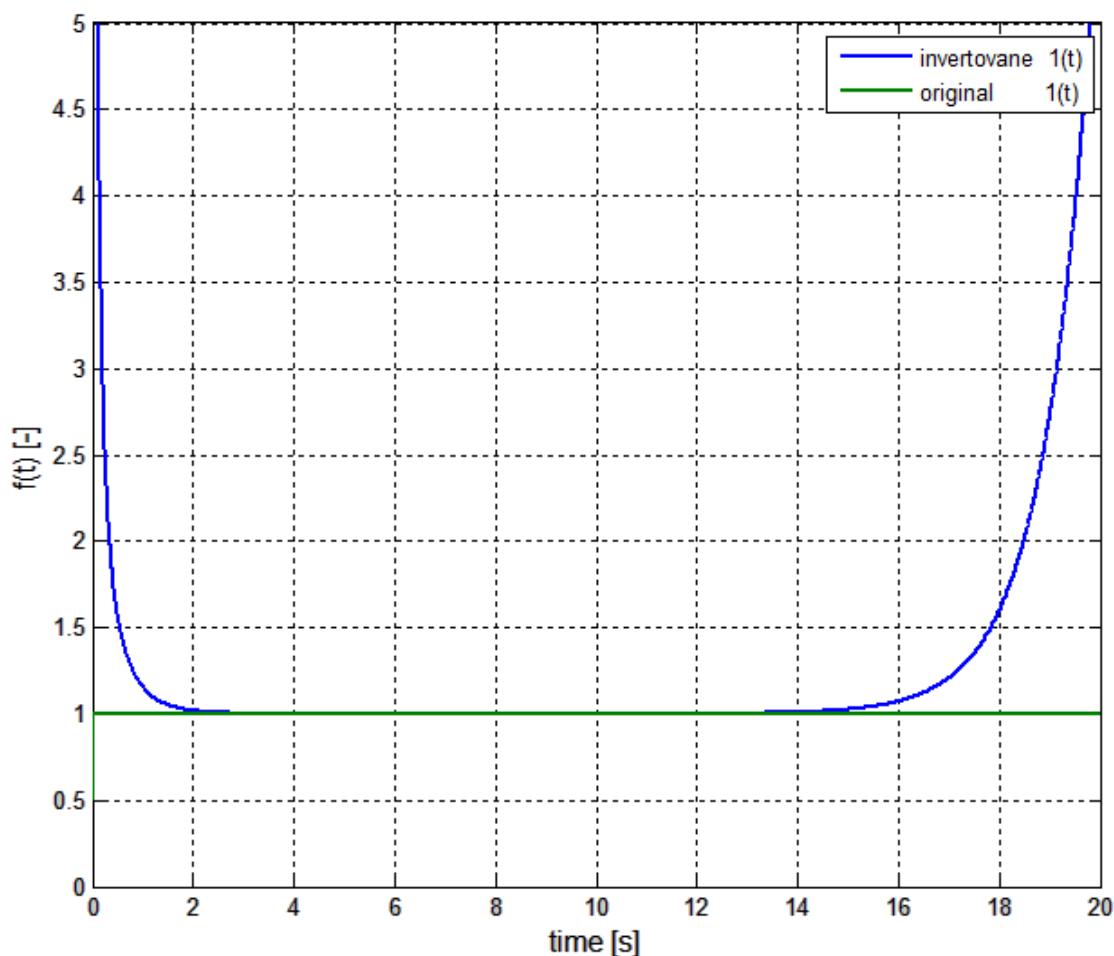
Neboli :  $F(s) = \frac{1}{s}$  v Laplaceově obrazu a tomu odpovídající Heavisideova funkce (jednotkový skok)  $f(t) = 1H(t)$ . Z obr. 3 je patrné, že pro malé  $c$  se invertovaná funkce ustálí mnohem pomaleji než pro větší  $c$ . U obr. 4 je zase vidět vhodně zvolená konstanta  $c = 0,5$ , kdy se invertovaná funkce se snaží udržet stejnou hodnotu jako originál i ve velkých časech. Obr. 5 demonstruje, že při použití příliš velké konstanty  $c$  dojde k rychlému exponenciálnímu nárůstu a invertovaná funkce začne nabývat enormních hodnot a již vůbec nekopíruje originál funkce. Je to způsobeno exponenciální funkcí  $e^{ct}$  ve vzorci (1.5) pro výpočet inverzní Laplaceovy transformace pomocí Bromwichova integrálu ve Fourierově tvaru. Čím více totiž roste čas  $t$ , tím rychleji dochází k tomuto nárůstu.

Pro funkci jednotkového skoku je tedy nejvýhodnější  $c \in <0.1; 0.4>$  v daném časovém rozmezí pro  $t \in <0s; 20s>$  pro konstantní  $N = 100$ .



Obr. 6: Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku při  $c = 0.5$  a  $N=10$ .

Dojde-li ale k snížení počtu opakování ( $N$ ) v algoritmu na nižší hodnotu než  $N = 100$  při  $c = 0.5$ , dojde k ustálení jednotkového skoku jenom jen ve velmi malém časovém rozmezí. To ukazuje Obr. 6, který demonstuje použití algoritmu na funkci jednotkového skoku při  $c = 0.5$  a  $N = 10$ . Při nižším počtu opakování  $N = 10$  dojde k projevu výše zmíněné funkce  $e^{ct}$  mnohem dříve než při větším počtu opakování. Zmíněné „přiblížení“ k jednotkovému skoku je jen pro časové rozmezí  $t \in <2s; 3s>$ .

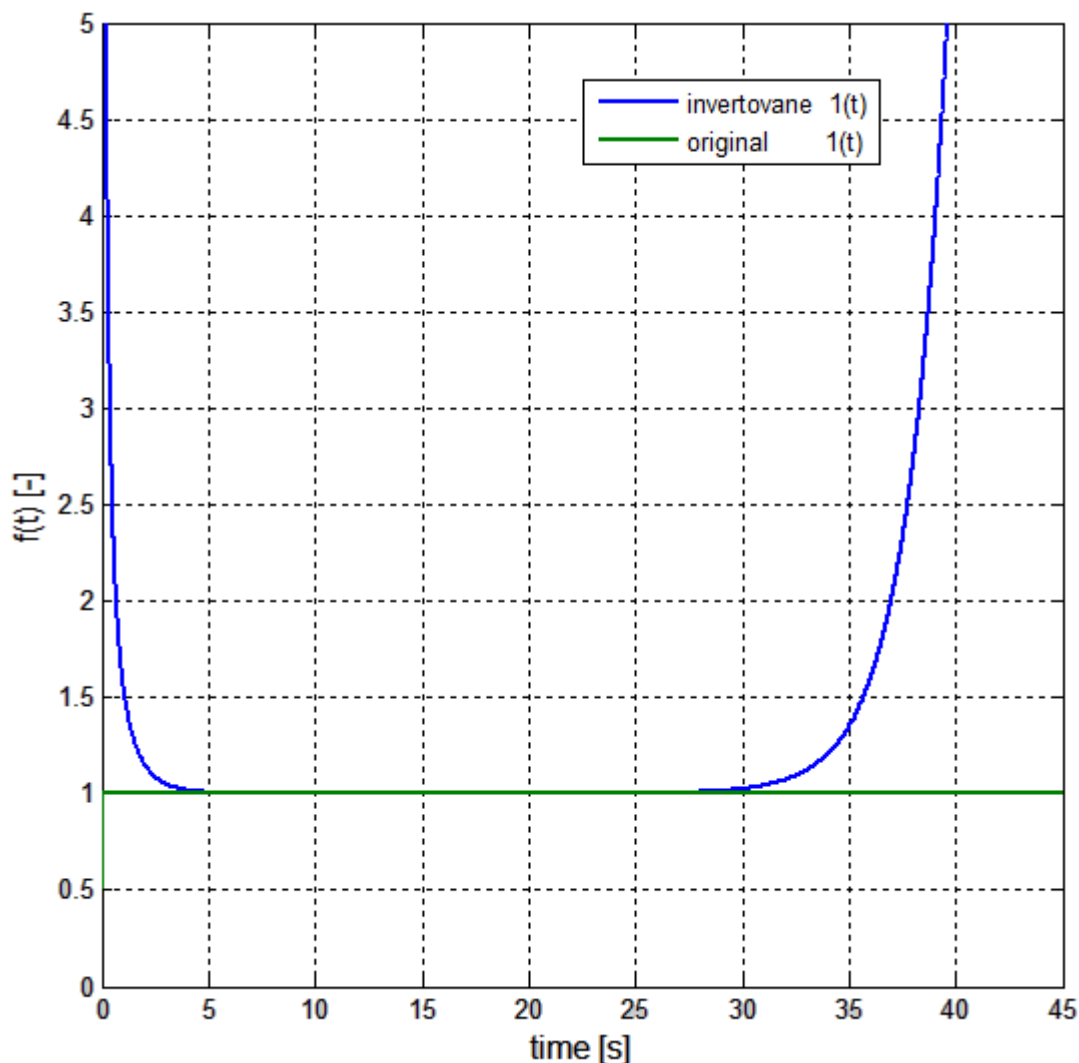


Obr. 7 Testování Dubner – Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 1$

Obr. 7 poukazuje na případ, kdy  $c = 1$  a  $N = 10^4$ . Čili algoritmus se velmi rychle ustálí, než pro menší  $c$ , pro danou funkci  $f(t)$  na požadovanou hodnotu 1. Bohužel velký počet opakování způsobuje větší časovou náročnost PC a to cca 5 sekund.

Z výše zmíněných pokusů pro testování Dubner-Abateho algoritmu pro funkci jednotkového skoku vyplývá, že malá konstanta  $c$  sice prodlouží dobu ustálení invertované funkce, ale na úkor pomalého ustalování. Velká konstanta  $c$  zase zlepší rychlé ustalování pro kratší časy, ale trvání ustálené invertované funkce je zase malé.

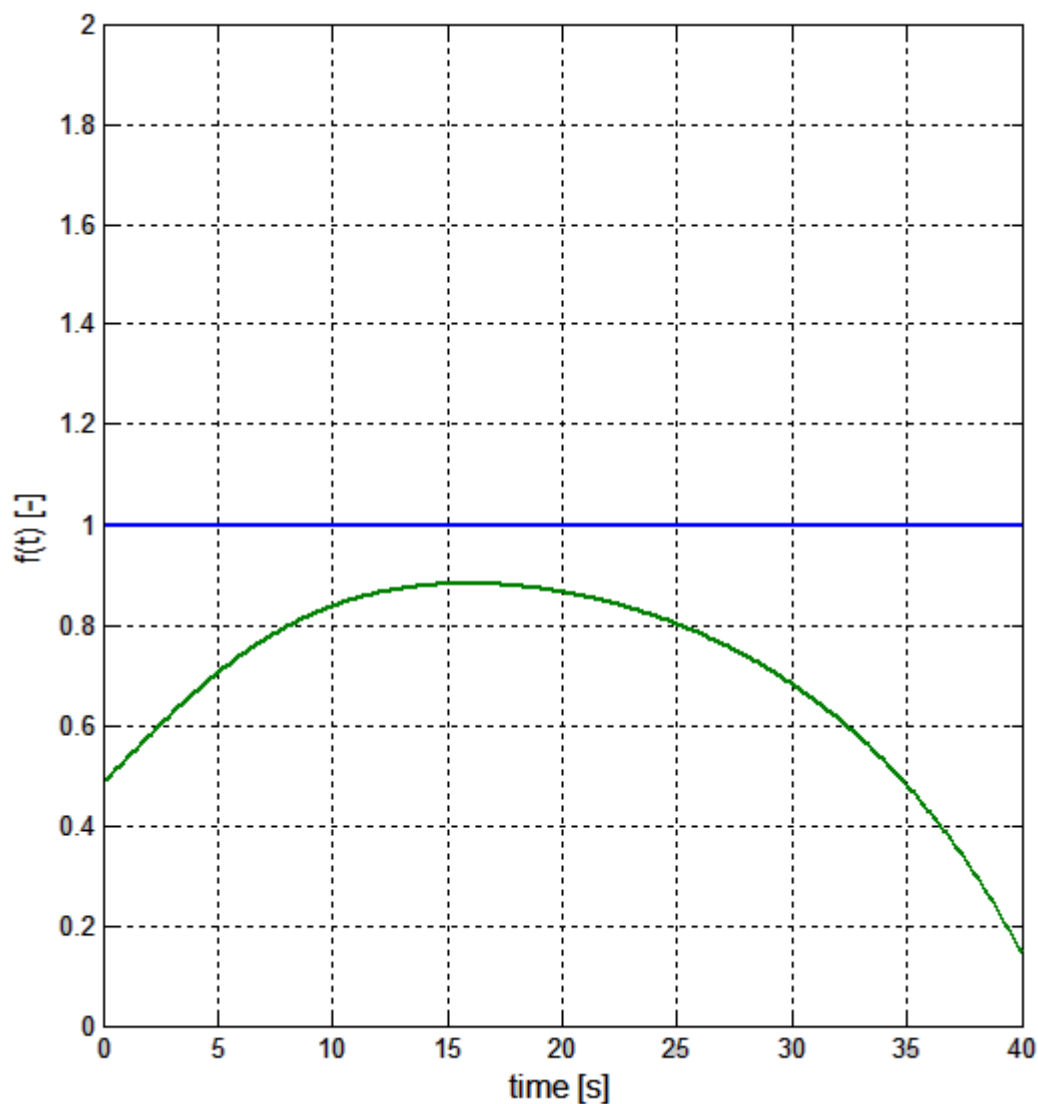
Počet opakování algoritmu  $N$  je důležitým faktorem, čím je totiž větší, tím déle vydrží ustálení invertované funkce. Cílem je tedy zvolit vhodně  $N$  i  $c$  tak, aby inverze byla co nejefektivnější, pro dosažení nejlepší shody s daným originálem v minimálním výpočetním čase. Tuto vlastnost algoritmu demonstruje Obr. 8.



Obr. 8 Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci jednotkového skoku při  $c = 0,5$  a  $N = 10^4$ .

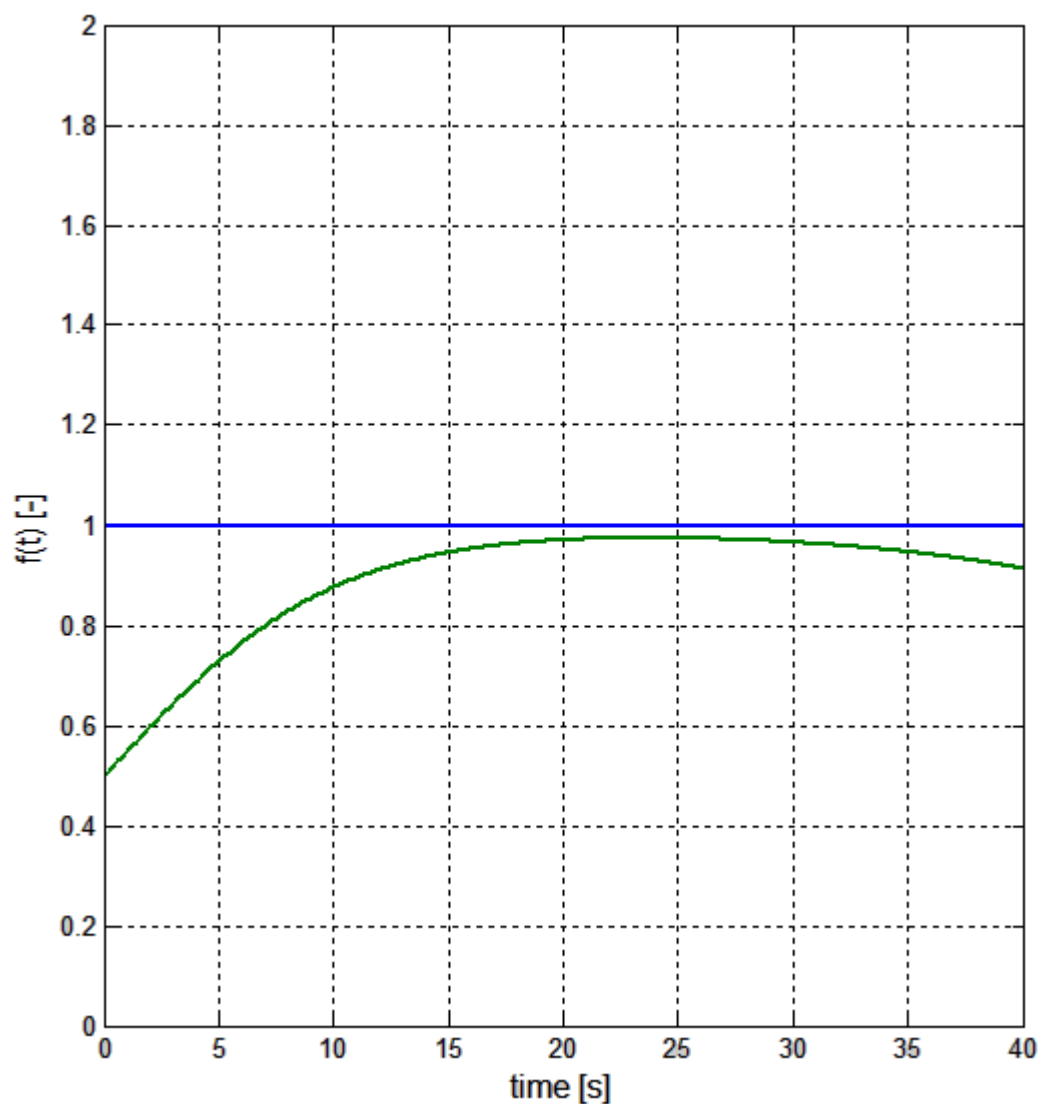
Obr. 8 ukazuje, že použitím vhodné konstanty  $c$  a ještě přijatelného počtu opakování algoritmu  $N$ , se invertovaná funkce jednotkového skoku ustálí v mnohem delším časovém intervalu, než při použití menšího počtu opakování algoritmu. V uvedeném případě dojde k přiblížení k jednotkovému skoku v intervalu  $t \in \langle 5s; 28s \rangle$  s chybou cca.  $+0,009$ . Při čase nad  $t = 28s$  začíná docházet k projevu exponenciální funkce a to již nelze ovlivnit. Trvání výpočtu a vykreslování grafu trvá asi 10 sec. Je-li zvoleno  $c = 0,5$  a  $N = 100000$ , čili o řád vyšší, dojde k ustálení algoritmu v časovém intervalu  $t \in \langle 4,75s; 37s \rangle$ , bohužel časová náročnost na výpočet již byla 2 minuty.

### 3.2 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku



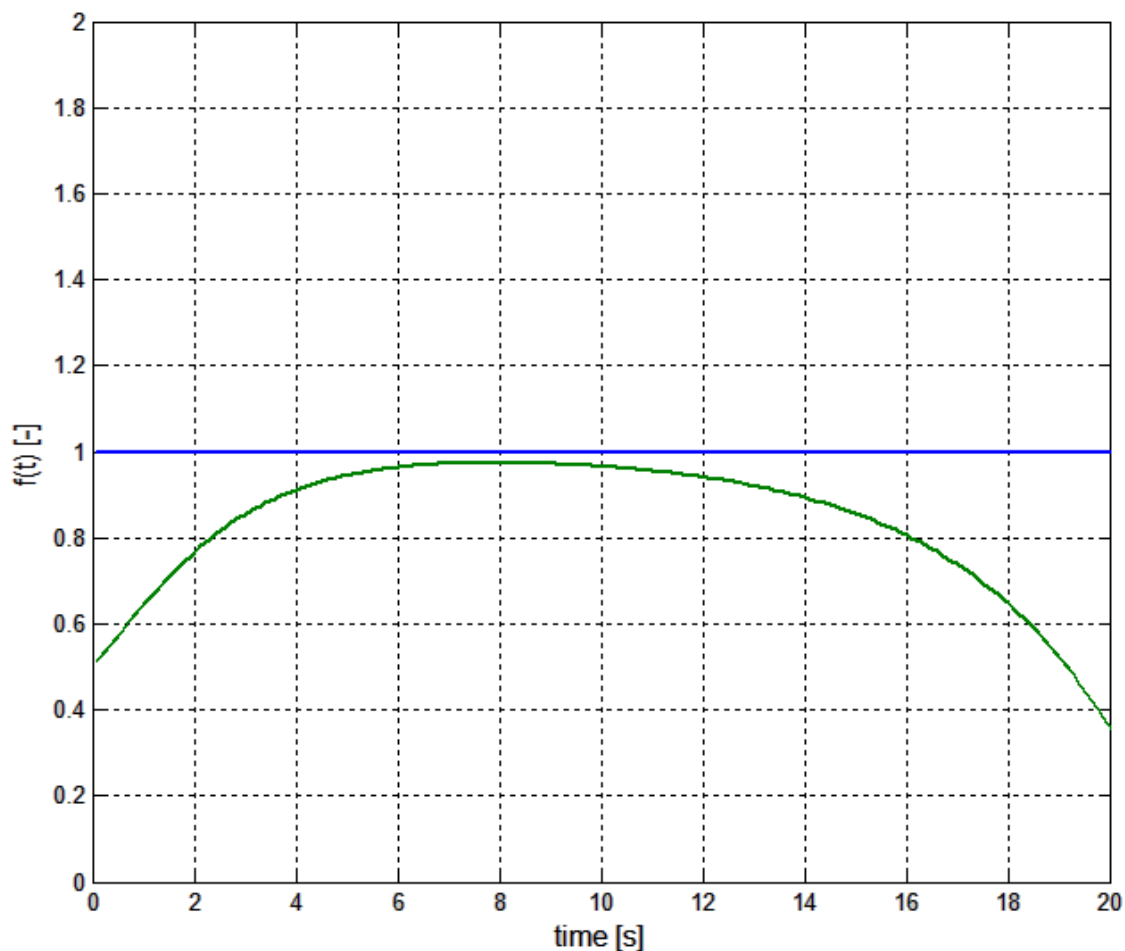
Obr. 9 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 0,1$  a  $N=10$ .

Obr. 9 ukazuje případ, kdy se Hosonoho algoritmus sice snaží přiblížit k originálu funkce  $f(t) = 1H(t)$ , ale díky malé konstantě  $c = 0,1$  a nízkému počtu opakování algoritmu  $N = 10$  není možné, aby se s dostatečnou rychlostí a přesností přiblížil k originálu.



Obr. 10 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku při  $c = 0.1$  a  $N=100$

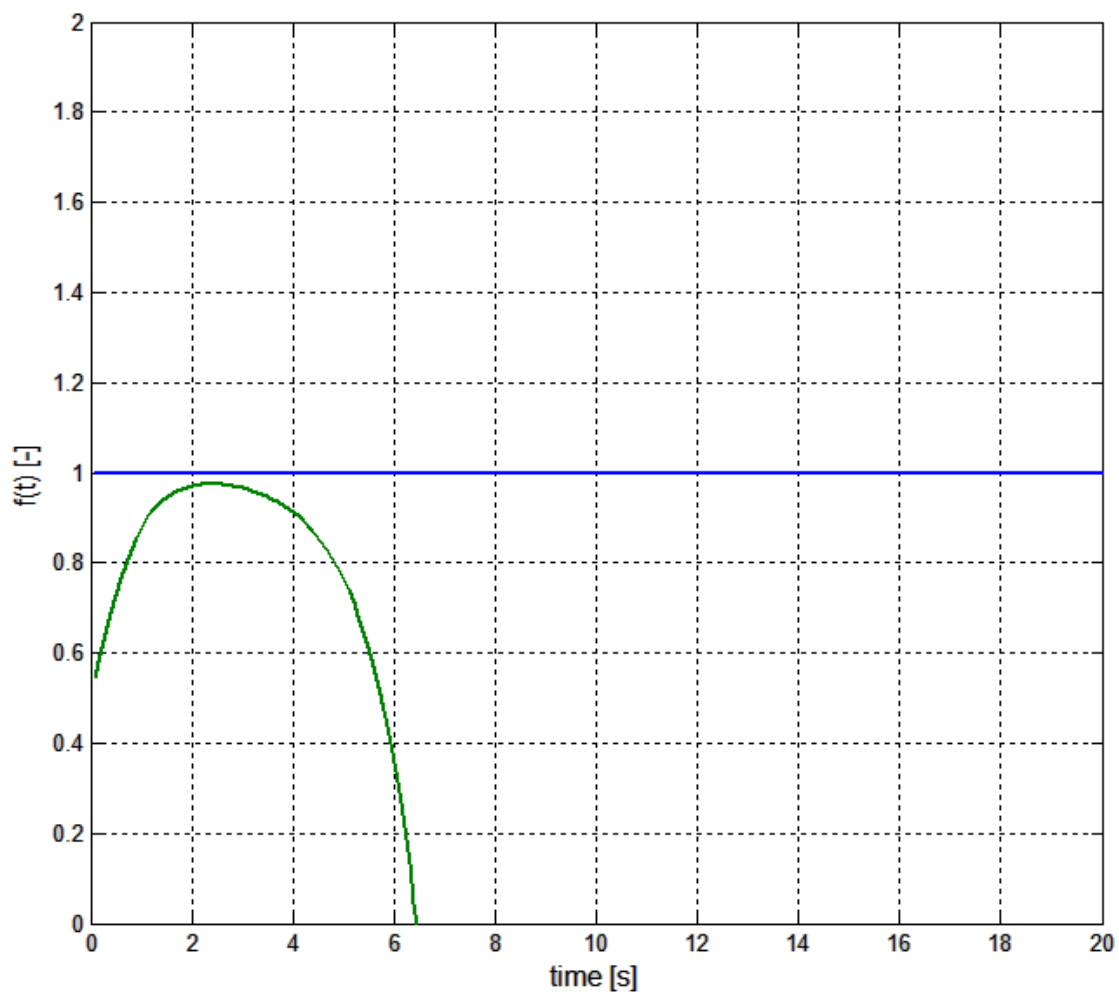
Na Obr. 10 je vidět, že při malé konstantě  $c = 0,1$  a zvýšení počtu opakování algoritmu se invertovaná funkce pomalu ustaluje, ale výsledek je mnohem lepší, než demonstruje Obr. 9. V dalším Obr. 11 bude ukázáno, jak se bude chovat Hosonoho algoritmus při testování jednotkového skoku na větší konstantě  $c = 0,3$  při zachování počtu opakování algoritmu  $N = 100$ .



Obr. 11 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 0,3$  a  $N = 100$

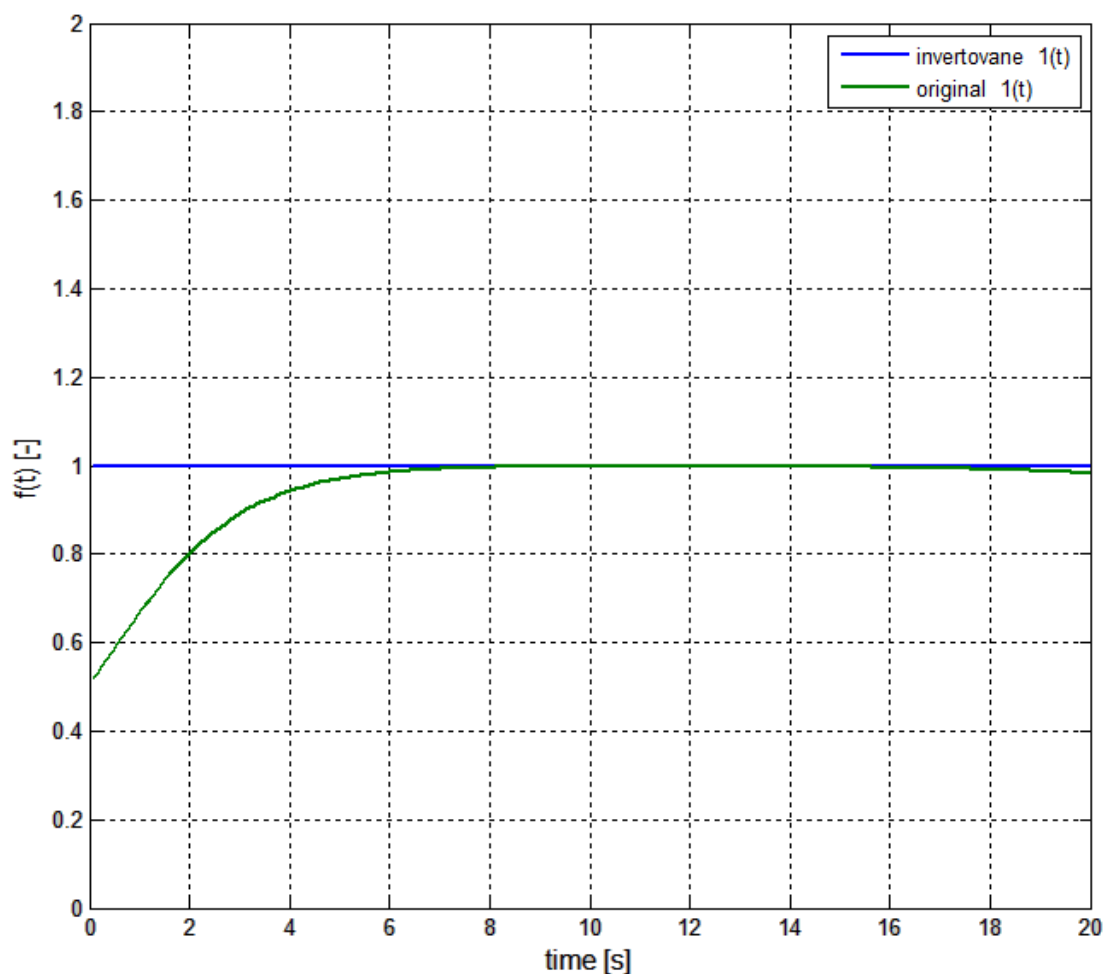
Obr. 11 ukazuje, že při nepatrném zvýšení konstanty  $c$  na hodnotu  $c = 0,3$  a zachování počtu opakování algoritmu  $N = 100$  oproti Obr. 10, dojde k degradaci invertované funkce již při čase  $t = 10$  s a k uspokojivému přiblížení k originálu v čase  $t = 6$  s. To při konstantě  $c = 0,1$  a  $N = 100$  nebylo, zde se algoritmus snažil přiblížit k originálu mnohem rychleji, zato však nedošlo k udržení invertované funkce  $f(t)$  a její rychlé degradaci. Obr. 12 ukáže, co se stane, když konstanta  $c$  dosáhne hodnoty  $c = 1$  a počet opakování algoritmu  $N$  bude opět zachován a to  $N = 100$ .





Obr. 12 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku pro  $c = 1$  a  $N = 100$ .

Obrázek 12 ukazuje, jak se chová Hosonoho algoritmus na funkci jednotkového skoku při použití příliš vysoké konstanty  $c = 1$ . Algoritmus se téměř vůbec nepřiblíží k originálu funkce a už vůbec nedojde k ustálení. V dalším Obr. 13 bude demonstrováno, jak se nejlépe přiblížit k ustálenému stavu, aby algoritmus setrval na hodnotě originálu  $f(t) = 1H(t)$ .



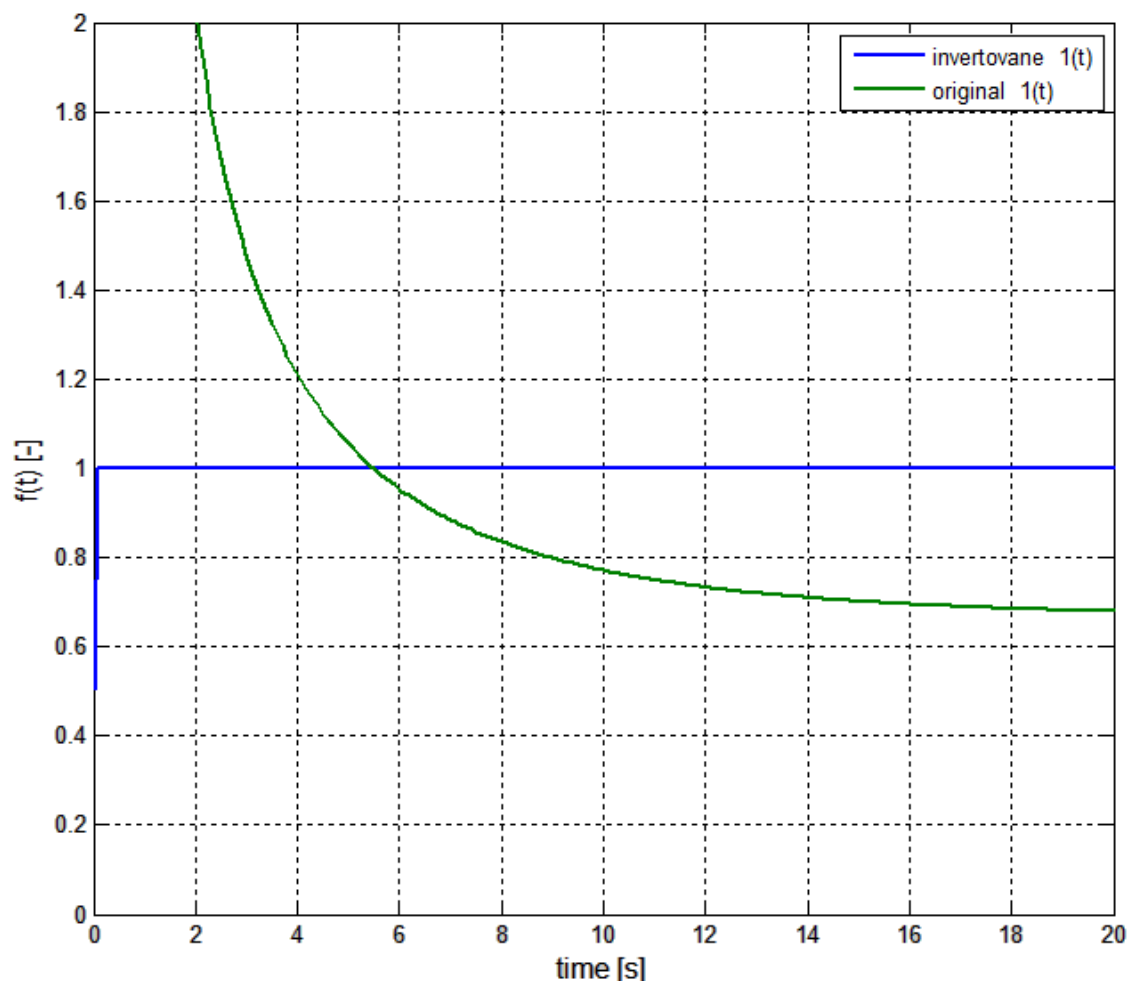
Obr. 13 Testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku při  $c = 0,35$  a  $N = 10^4$

Z Obr. 13, je vidět, že použitím větší konstanty dojde k rychlejšímu ustalování invertované funkce  $f(t) = 1H(t)$  a zároveň při použití většího počtu opakování algoritmu dojde také k silnějšímu ustálení. Jinými slovy algoritmu drží při větším počtu opakování mnohem lépe, než při menším počtu opakování pro větší časy  $t$ . V uvedeném případě algoritmus se velmi přesně ustálil pro časové rozmezí  $t \in \langle 8s; 16s \rangle$

Závěr testování Hosonoho algoritmu na funkci jednotkového skoku je jednoduchý. Čím menší je konstanta  $c$ , tím lépe se algoritmus chová pro větší časy a drží invertovanou funkci mnohem déle než při větší konstantě  $c$  (řádově desetiny a setiny). Nevýhodou malé konstanty je ale velmi dlouhé ustalování invertované funkce  $f(t)$ . V opačném případě, kdy konstanta  $c$  je větší (pro  $c \in \langle 0,35; 1 \rangle$  pro funkci jednotkového skoku), dojde k rychlejšímu přiblížení k originálu funkce  $f(t)$ , ale bohužel algoritmus již nedokáže držet svou hodnotu  $f(t) = 1$  na daném originálu a velmi rychle klesá k nízkým hodnotám, obdobně jako tomu bylo u degradace při použití Dubner-Abateho algoritmu.

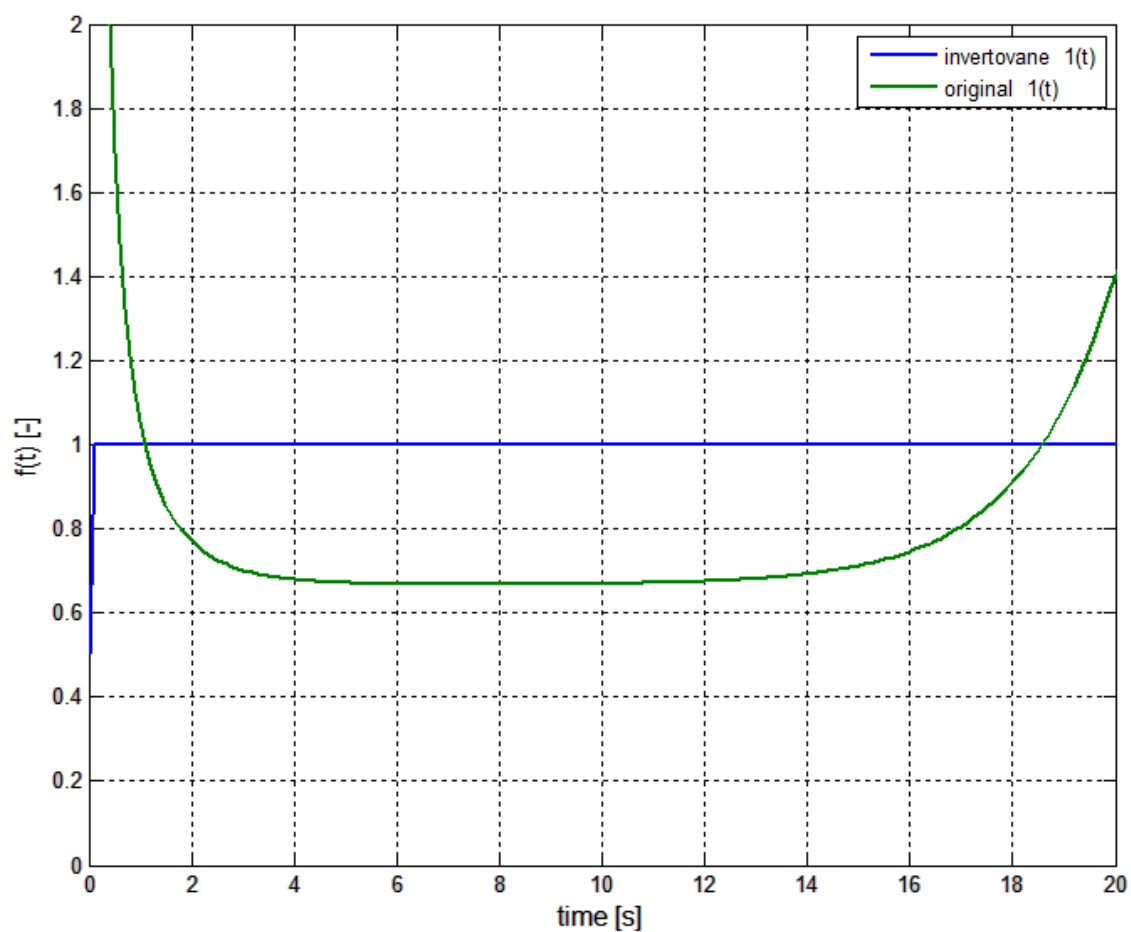
### 3.3 Testování algoritmu založeném na Simpsonově pravidle

Jak už bylo zmíněno při odvozování tohoto algoritmu, tento algoritmus byl odvozen autorem této práce a není možné předpokládat, jak se bude chovat.



Obr. 14 Testování algoritmu odvozeného pomocí Simpsonova pravidla pro  $c = 0.1$  a  $N = 100$ .

Obrázek 14 ukazuje ustalování invertované funkce na funkci jednotkového skoku. Zpočátku dochází k velmi pomalému ustalování invertované funkce  $f(t)$  a až asi po čase  $t = 12$ s dojde k ustálení na nějakou hodnotu. Jelikož nelze předpokládat chování algoritmu, tak dochází k ustálení na hodnotu cca  $f(t) = 0,67$  pro  $t > 12$ s. Je zde poměrně velká chyba od originálu a to cca 0.33.

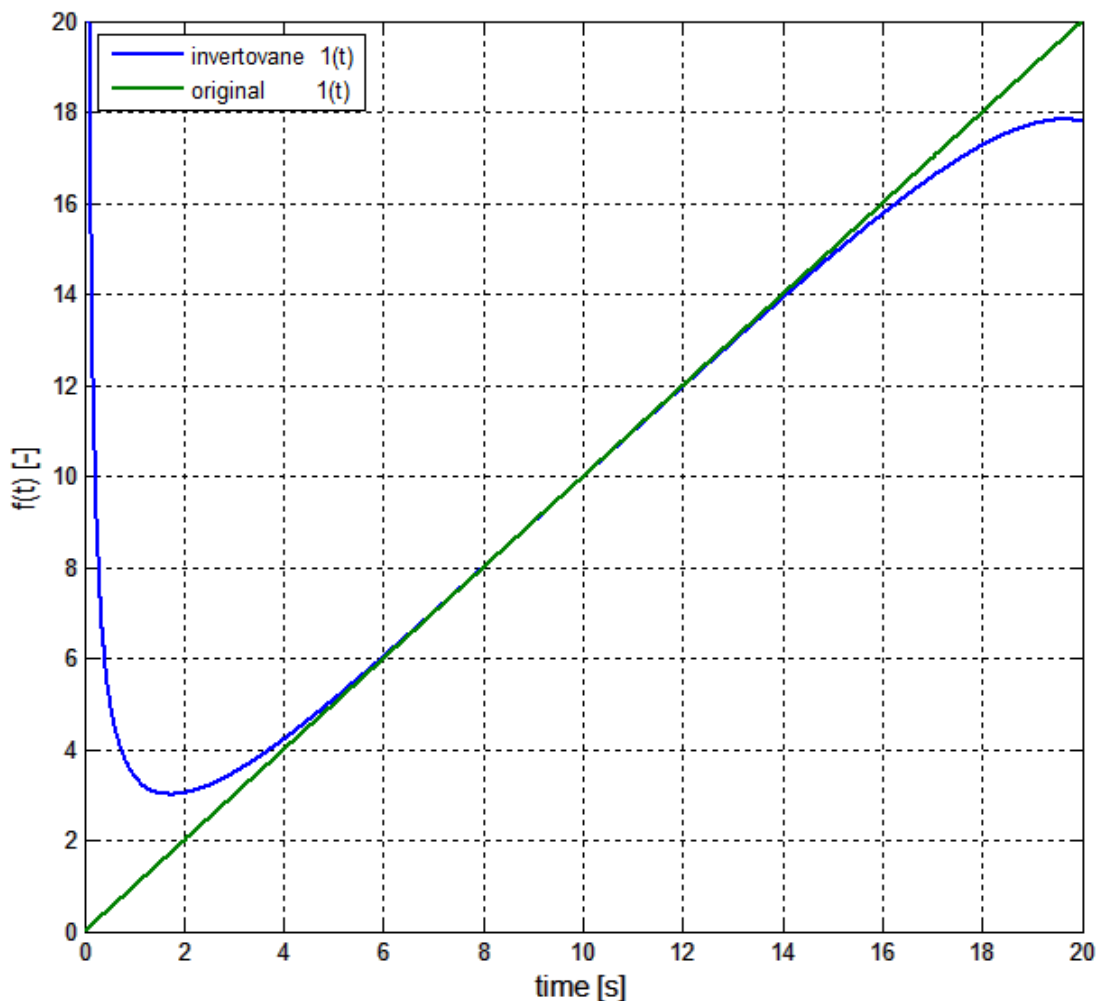


Obr. 15 Testování algoritmu odvozeného pomocí Simpsonova pravidla pro  $c = 0.5$  a  $N = 100$

Obrázek 15 spolu s předešlým Obr. 14 dokazuje, že použití algoritmu odvozeného pomocí Simpsonova pravidla na funkci jednotkového skoku má sice dobré ustalující účinky pro větší  $N$  (řádově stovky až tisíce), obdobné jako u Hosonoho algoritmu, ale invertovaná funkce  $f(t)$  je značně posunutá od originálu.

### 3.4 Testování Dubner-Abateho algoritmu na lineární funkci

Tato kapitola je obdobná jako kapitola 3.1, jen je jako testovací funkce použita lineární funkce, jejíž obraz je  $F(s) = \frac{1}{s^2}$  a originál funkce je  $f(t) = t H(t)$ .



Obr. 16 Testování Dubner-Abateho algoritmu na lineární funkci pro  $c = 0.5$  a  $N = 100$ .

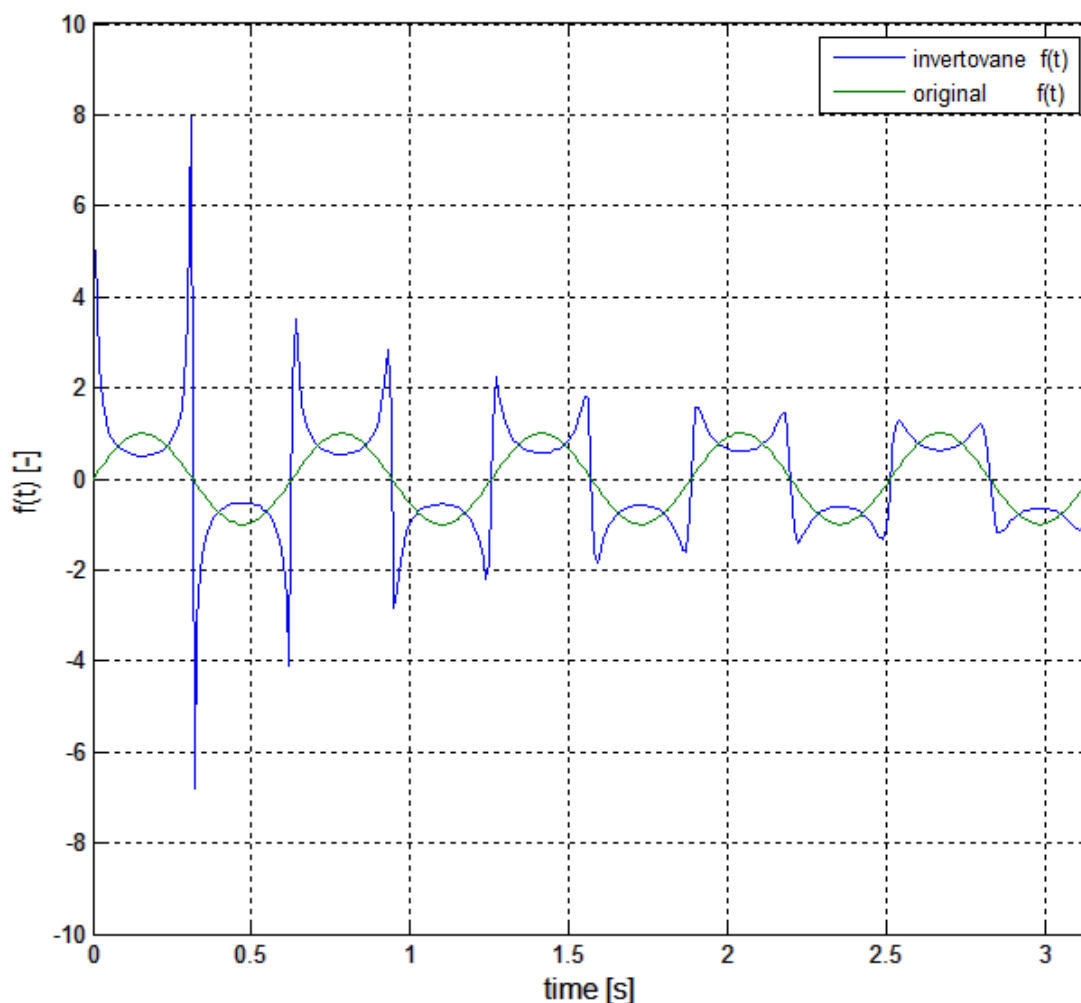
Situace je téměř stejná jako u kapitoly 3.1, kde byl Dubner-Abateho algoritmus testován na funkci jednotkového skoku. Pro malé  $c$  (řádově desetiny) a dochází opět k pozvolnému ustalování pro malé časy. Velké  $c$  (nad 0.5) má za následek rychlé ustálení invertované funkce, zato však pro větší časy již tato funkce nevydrží být ustálená. Jiné to bude, bude-li testována goniometrická funkce na Dubner-Abateho algoritmu, jak bude ukázáno v kapitole 3.5.

### 3.5 Testování Dubner-Abateho algoritmu na goniometrické funkci sinus

V této kapitole, jak název napovídá, bude testován Dubner-Abateho algoritmus na funkci sinus. Obraz funkce sinus má v operátorovém tvaru následující tvar :

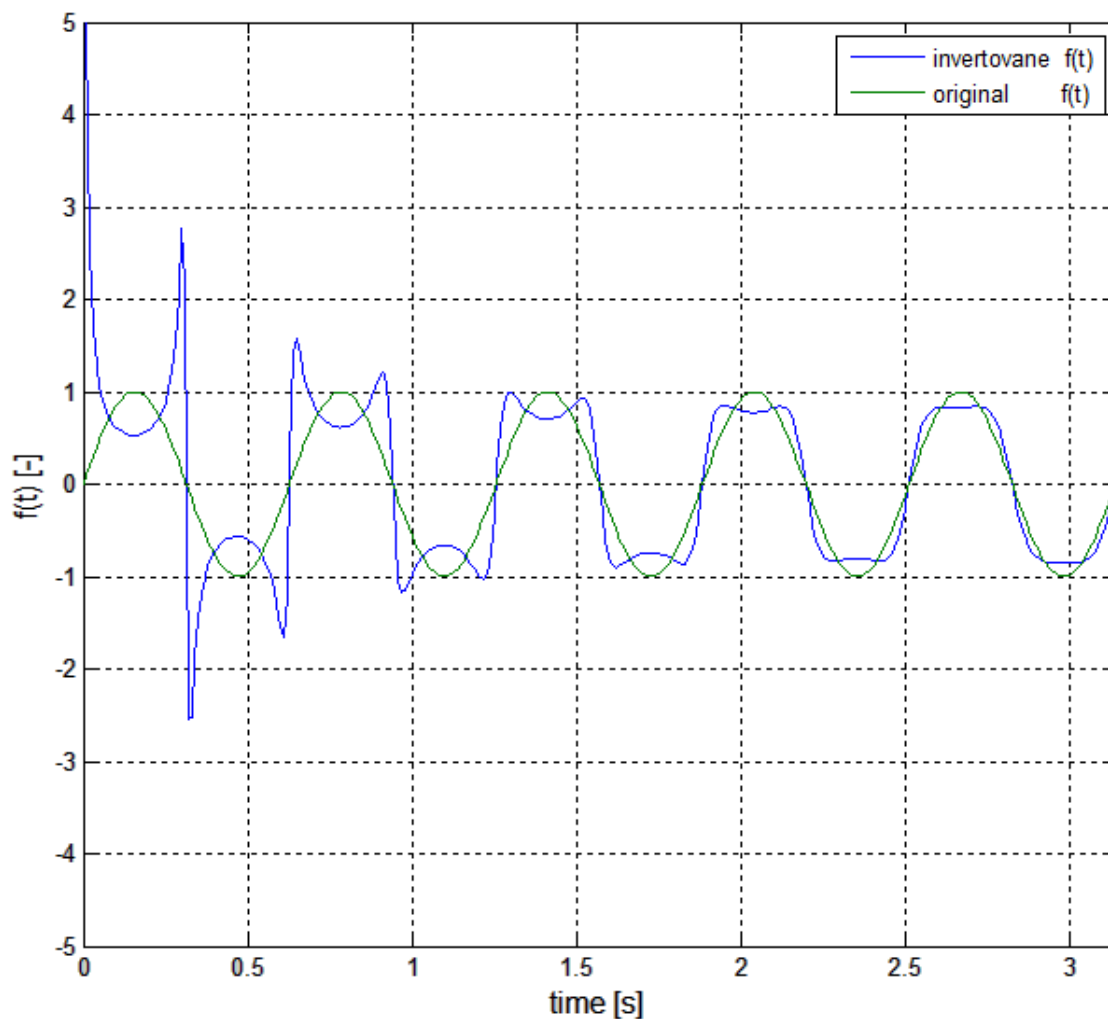
$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \text{ a tomu odpovídající originál funkce sinus: } f(t) = \sin(at) .$$

,kde  $t$  označuje čas, konstanta  $a$  určuje frekvenci goniometrické funkce a  $s$  je parametr Laplaceovy transformace



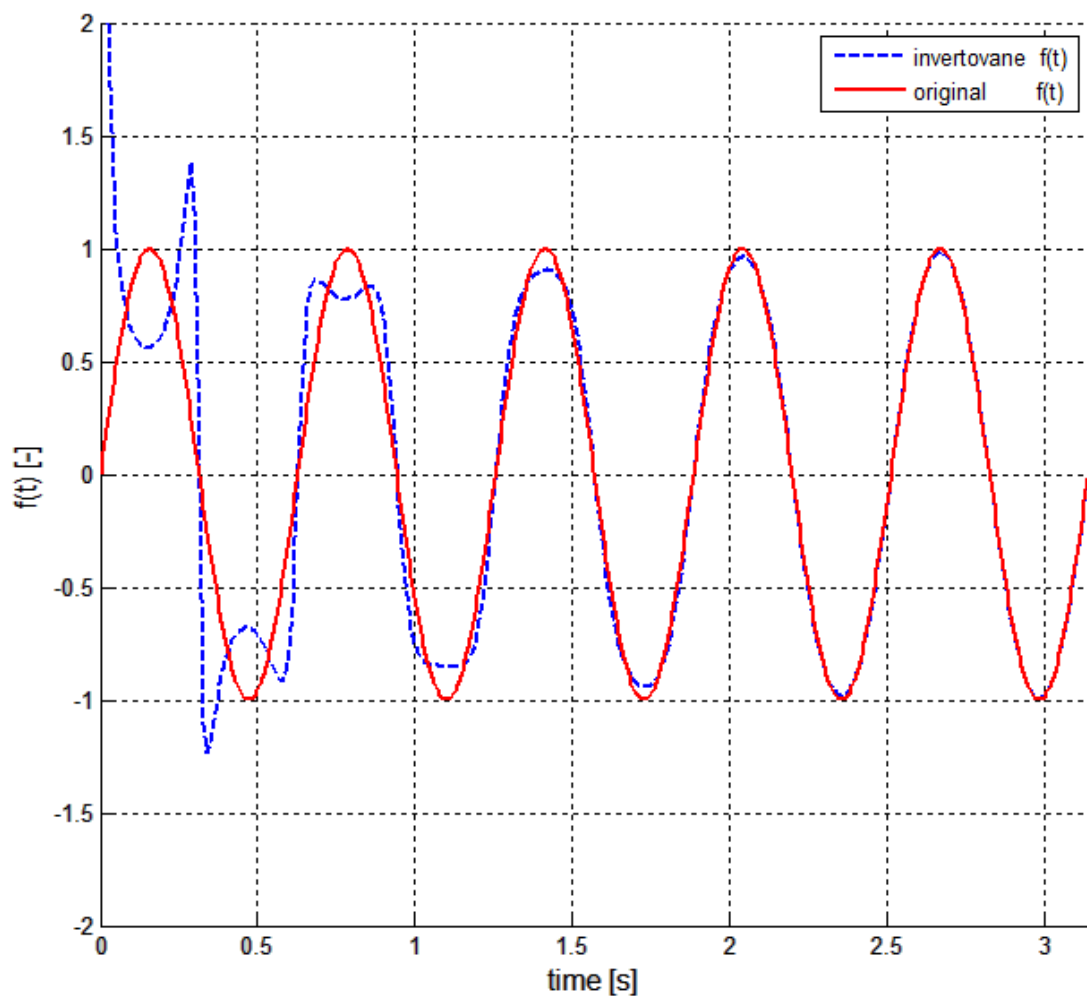
Obr. 17 Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci  $\sin(at)$  pro  $c = 0.1$  a  $N = 100$

V předešlých kapitolách již bylo naznačeno, že konstanta  $c$  určuje rychlost konvergence k danému originálu a počet opakování algoritmu  $N$  zlepšuje tuto rychlost ustalování k danému originálu. V případě Obr. 17, kdy je konstanta  $c$  zvolena  $c = 0.1$  a  $N = 100$ . I když dojde k neměnnosti konstanty  $c$  a  $N$  se bude zvětšovat, nedojde k viditelnému zlepšení ustalování.



Obr. 18 Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci  $\sin(at)$  pro  $c = 0.3$  a  $N=100$  a  $a = 10$

Na Obr. 18 je zřetelně vidět, že při neměnnosti počtu opakování algoritmu  $N$  a menšímu zvýšení konstanty  $c$  na hodnotu  $c = 0,3$  dojde k zlepšení ustalování invertované funkce a v čase větším jak 2s se již snaží algoritmus kopírovat zelený originál funkce, ale ne dostatečně. Řešením pro daný algoritmus bude zvolit konstantu  $c$  dostatečně velkou. Z výše ověřených pokusů vyplývá, že počet opakování algoritmu nemá na invertovanou funkci  $f(t)$  zas tak velký vliv. Stačí zvolit  $N = 25$  a více ( ne však přesahující hodnotu  $N = 10^6$ , došlo by k větší náročnosti na PC ) a v uvedeném časovém intervalu to bohatě postačí k ustálení funkce. Cílem je zvolit správně  $c$ , opět tak velké, aby došlo k rychlejšímu ustalování, ale tak velké, že ve větším čase dojde k degradaci funkce.



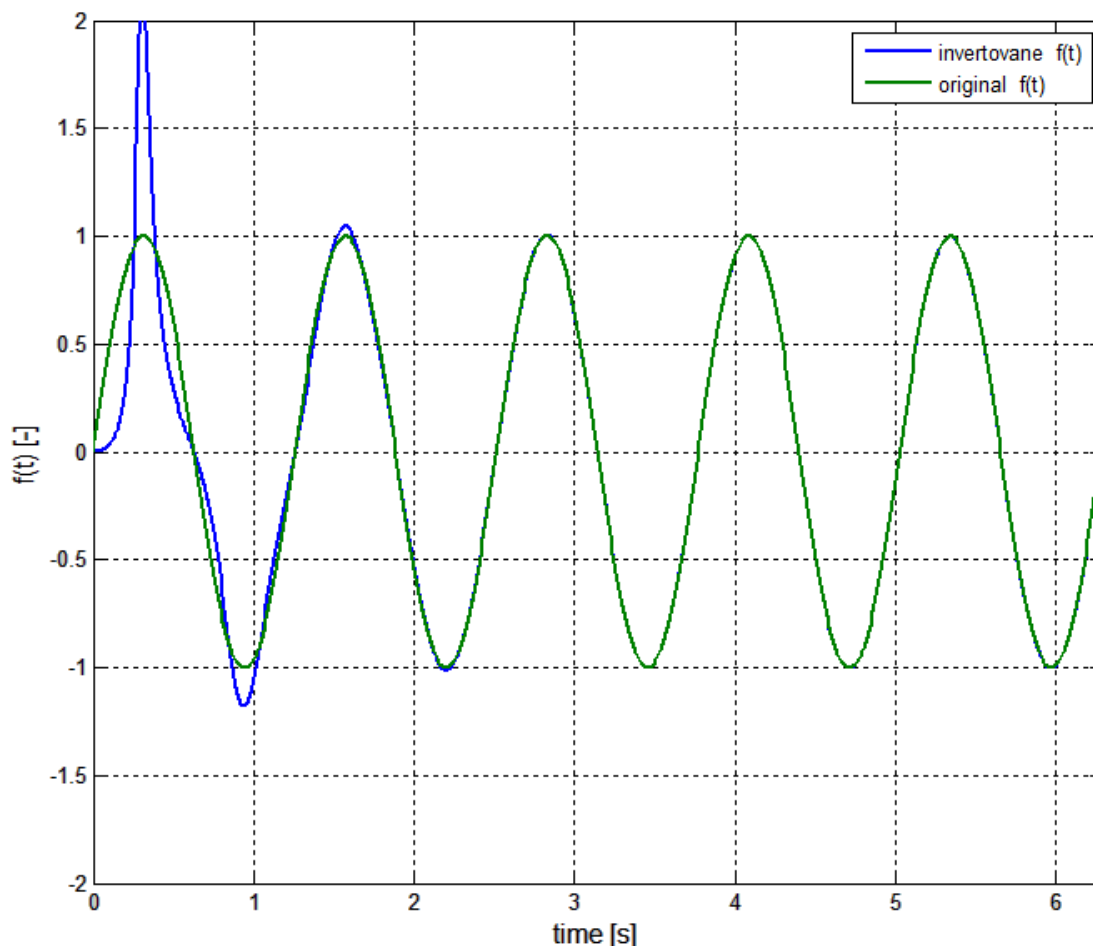
Obr. 19 Testování Dubner-Abateho algoritmu na funkci  $\sin(at)$  pro  $c = 0.8$  a  $N = 100$  a  $a = 10$

Obrázek 19 ukazuje, že při použití větší konstanty  $c = 0.8$ , dojde k ustálení funkce  $\sin(10t)$  již při 3. periodě této funkce, což u menší konstanty  $c$  u Obr. 18 nebylo možné. Bude-li zvolena konstanta  $c$  větší jak  $c = 1$ , dojde k degradaci invertované funkce již při 2. periodě a invertovaná funkce přestane kopírovat originál ve větších časech. Je to způsobeno opět nárůstem exponenciální funkce  $e^{ct}$  ve vzorci pro výpočet Dubner-Abateho algoritmu.



### 3.6 Testování Hosonoho algoritmu na goniometrické funkci sinus

Tato kapitola se zabývá testováním Hosonoho algoritmu na funkci  $f(t) = \sin(at)$ . Jde o stejné testování jako u kapitoly 3.5, aby mohlo dojít v kapitole 4 k porovnání všech testovaných algoritmů.



Obr. 20 Testování Hosono algoritmu na funkci  $f(t) = \sin(at)$  pro  $c = 1$  a  $N = 100$  a  $a = 5$ .

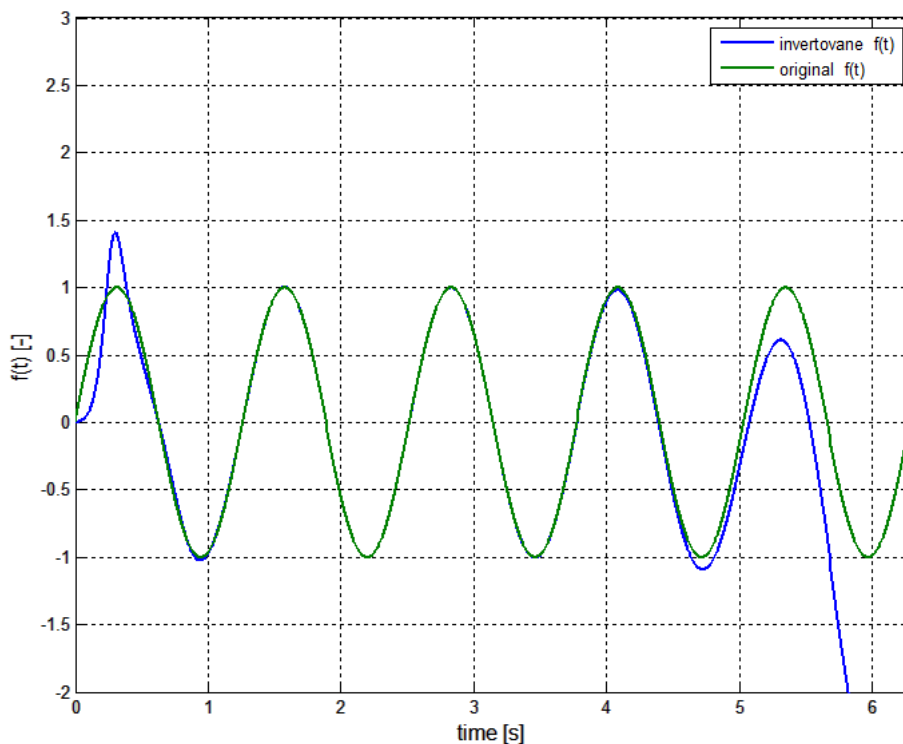
Na Obr. 20 je vidět, že invertovaná funkce má problém pro první periodu, ale s rostoucím časem (čas nad 2 s) dojde k splynutí originálu a invertované funkce téměř s nulovou přesností. To vše se děje až do doby, kdy se invertovaná funkce začne od originálu oddalovat. Je to způsobeno opět exponenciálním členem typu  $\frac{e^{A/2}}{t}$  v Hosonoho i Dubner-Abateho algoritmu (rovnice (2.6) a (2.7)). Při odvozování bylo naznačeno, že konstanta  $A$  je závislá na čase i konstantě  $c$ , jinými slovy  $A = 2ct$ . Pro téměř nulové časy, bude člen  $e^{A/2}$  malý, ale jelikož je tento člen vydělen časem  $t$  a ten je hodně malý, ve výsledku bude člen  $\frac{e^{A/2}}{t}$  hodně velký. Proto má Hosonoho a Dubner-Abateho algoritmus dobré účinky až po uplynutí nějaké doby (cca 2s pro výše

testované funkce ). Pak se algoritmus nějakou dobu snaží kopírovat originál funkce, ale pak dochází k exponenciálnímu nárůstu členu  $\frac{e^{A/2}}{t}$  a již nepomáhá ani vydělení tohoto členu časem, aby došlo k redukci tohoto členu na nižší hodnotu a funkce mohla déle kopírovat daný originál.

Dalším faktem je člen, obsažený v rovnicích (2.6 a 2.7), jehož tvar je :

$$\operatorname{Re}\left[F\left(\frac{A+2n\pi i}{2t}\right)\right] \text{ pro Dubner – Abateho algoritmus a } \operatorname{Im}\left\{F\left[\frac{A+(2n-1)\pi i}{2t}\right]\right\} \text{ pro}$$

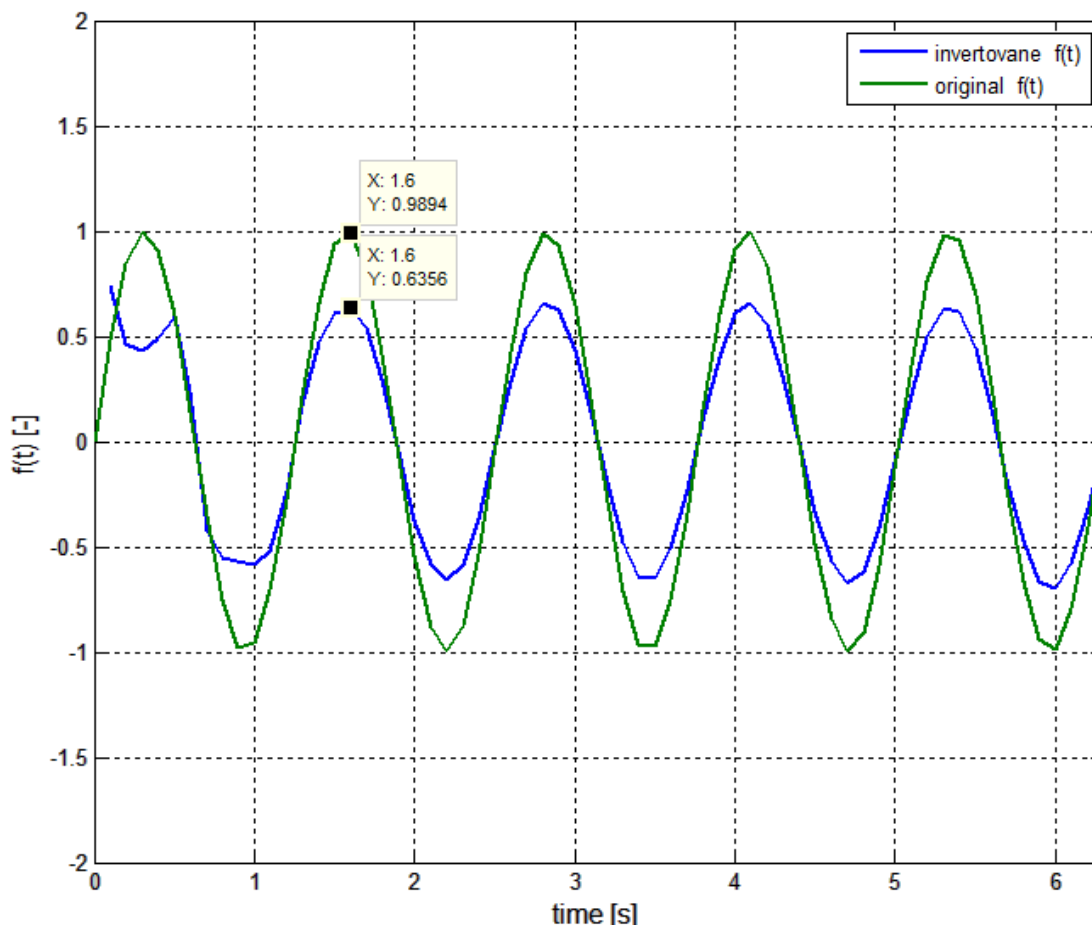
Hosonoho algoritmus. Tyto členy nabývají ze začátku velmi nízkých, téměř nulových hodnot a s rostoucím časem se zvětšují (záleží na typu testované funkce). To také přispívá k oddálení invertované funkce od originálu ve větších časech. V případě Hosonoho algoritmu nepomáhá ani zvýšení počtu opakování algoritmu  $N$  o několik řádů (cca  $N=10^6$  a více). Tento případ demonstruje Obr. 21, kde byla konstanta  $c$  zvolena větší ( $c=2$ ). Dojde tedy k rychlejšímu ustalování pro menší časy na úkor rychlejšímu oddálení invertované funkce od originálu ve větších časech.



Obr. 21 Testování Hosonoho algoritmu na funkci  $f(t) = \sin(at)$  pro  $c=2$  a  $N=100$  a  $a=5$ .

### 3.7 Testování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle na goniometrické funkci

Tato kapitola je věnována otestování tohoto algoritmu také na funkci  $f(t) = \sin(at)$ , jako tomu bylo v kapitolách 3.5 a 3.6. Jelikož docházelo k jistému posunutí od originálu v případě kapitoly 3.3, kde se testoval tento algoritmus na funkci jednotkového skoku, lze předpokládat, že dojde k jistému posunutí i u funkce sinus nebo její deformaci.



Obr. 22 Testování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle na funkci  $f(t) = \sin(at)$  pro  $c = 1$  a  $N = 100$  a  $a = 4$ .

Obrázek 22 demonstruje chování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle. Jako u všech algoritmů, má problém pro minimální časy, jako tomu bylo u Hosonoho algoritmu i Dubner-Abateho. Problém je ovšem v nepřesnosti ustalování, uvedená modrá křivka (invertovaná funkce) se sice snaží kopírovat originál funkce, ale dochází ke snížení amplitudy této invertované funkce. Řešením tohoto problému je zvýšit amplitudu o nějakou hodnotu, invertovaná funkce pak bude kopírovat dobře daný originál. Experimentálně pomocí matlabovských kurzorů bylo zjištěno, že vynásobením invertované funkce hodnotou 1.5 dojde k lepšímu přiblížení k originálu. Tato hodnota je velmi důležitá a může v ní být skryta nepřesnost, kterou algoritmus založený na Simpsonově pravidle dělá pro testování této goniometrické funkce i funkce

jednotkového skoku. V obou testovaných případech, dojde-li k vynásobení konečné invertované funkce právě touto hodnotou, invertovaná funkce se přiblíží ke svému originálu mnohem přesněji.

## 4 TESTOVÁNÍ ALGORITMŮ NA OBRAZECH SDĚLOVACÍHO VEDENÍ

Tato kapitola je věnována testování různých obrazů proudu či napětí sdělovacího vedení různých typů operátorového tvaru. Bude se jednat o vedení se zanedbatelným svodem i indukčností, spojené na jednom konci nakrátko pro dva druhy vstupních signálů.

Výše uvedené typy vedení mají vhodné obrazy proudu či napětí pro testování algoritmů odvozených v kapitole 2.

### 4.1 Vedení se zanedbatelným svodem i indukčností, spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel ).

Pro toto vedení platí podmínka nulové indukčnosti, svodu a impedance zapojené na konec vedení, tu lze zapsat jako :

$$G = L = 0 \text{ a } Z(s) = 0 \quad (4.1)$$

Napětí vedení tohoto typu v operátorovém tvaru má pak tvar [2]:

$$U(s) = U_0(s) \cdot \frac{\sinh(\sqrt{s}x\sqrt{RC})}{\sinh(\sqrt{s}l\sqrt{RC})} \quad (4.2)$$

Za předpokladu, že na vstup vedení bylo připojeno napětí, rovnající se funkci jednotkového skoku, rovnice (4.2) pak přejde do tvaru [2]:

$$U(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(\sqrt{s}x\sqrt{RC})}{\sinh(\sqrt{s}l\sqrt{RC})} \quad (4.3)$$

,kde  $s$  je parametr Laplaceovy transformace, funkce  $\sinh$  je označení pro hyperbolický sinus,  $x$  je zvolené místo ve vedení,  $l$  je délka vedení a konstanty  $R$  a  $C$  označují po řadě odpor a indukčnost vedení.

V následujícím odstavci bude odvozen originál funkce obrazu rovnice (4.3) za použití residuovy věty a Bromwichova integrálu.

Za podmínky  $\alpha = x\sqrt{RC}$  a  $\beta = l\sqrt{RC}$  přejde rovnice (4.3) do prvního kroku inverze a to za použití Bromwichova integrálu [2]:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st} \sinh \alpha \sqrt{s}}{s \sinh \beta \sqrt{s}} ds \quad (4.4)$$

Z residuovy věty vyplývá, že inverzní Laplaceovu transformaci zapsanou jako rovnici (4.4) lze vypočítat jako součet všech residuí v příslušných pólech vyšetřované funkce. Póly jsou myšlena místa, kde jmenovatel funkce nabývá nulových hodnot. Pro tyto póly dojde k výpočtu příslušných residuí a jejich součtu. Výsledný součet residuí je potom invertovaná funkce ( v tomto případě hledané napětí  $u(t)$  ).

Dále je nutno zjistit, jaké póly ( řadu pólů ) má funkce  $\sinh \beta\sqrt{s}$ . Součtem těchto residuí je potom řada zapsaná ve tvaru. To se těžko zjišťuje, protože funkce  $\sinh$  je nulová pouze v 0. Proto je nutno použít obor komplexních čísel a tím zjistit nulovost takto položené funkce. V oboru komplexních čísel je funkce  $\sinh \beta\sqrt{s}$  nulová pro  $\beta\sqrt{s} = \pm jm\pi$ .

Součet všech residuí je potom dán výrazem [2]:

$$u(t) = \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{st} \sinh \alpha\sqrt{s}}{\frac{\beta}{2}\sqrt{s} \cosh \beta\sqrt{s}} \right]_{\beta\sqrt{s}=\pm jm\pi} + \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.5)$$

, kde m je celé kladné číslo od 1 do  $\infty$ .

Výraz  $\cosh \beta\sqrt{s}$  lze přepsat jako  $\cosh \beta\sqrt{s} = \cos m\pi = (-1)^m$ , výraz (4.5) po výpočtu všech residuí a zpětnému dosazení podmínek za  $\alpha = x\sqrt{RC}$  a  $\beta = l\sqrt{RC}$  pak přejde do tvaru [2]:

$$u(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)}{m\pi} \cdot e^{-\frac{m^2\pi^2}{l^2 RC}t} + \frac{x}{l} \quad (4.6)$$

Tento výpočet je pouze velmi zkrácenou verzí a demonstrací toho, jak složitý výpočet musí obraz funkce tvaru vedení tohoto typu podstoupit, aby došlo k jeho inverzi a získání napětí  $u(t)$  v časové oblasti. V následující kapitole bude tento obraz rovnice (4.3) testován na všech třech algoritmech. Na rozdíl od kapitoly 4.1 je zde k dispozici originál i obraz, proto může dojít k lepšímu porovnání.

Pokud je na vstup vedení přiveden harmonický signál, v tomto případě

$$u_0(t) = \cos(\omega t) \quad (4.7)$$

, přejde obraz napětí na vedení (4.5) v časové oblasti do ustáleného tvaru [2]:

$$u(t) = \cos \omega t \cdot \left[ \frac{x}{l} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\frac{\omega^2 l^4 R^2 C^2}{m\pi}}{\omega^2 l^4 R^2 C^2 + m^4 \pi^4} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \right] - \\ - 2\omega l^2 RC \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m\pi}{\omega^2 l^4 R^2 C^2 + m^4 \pi^4} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (4.8)$$

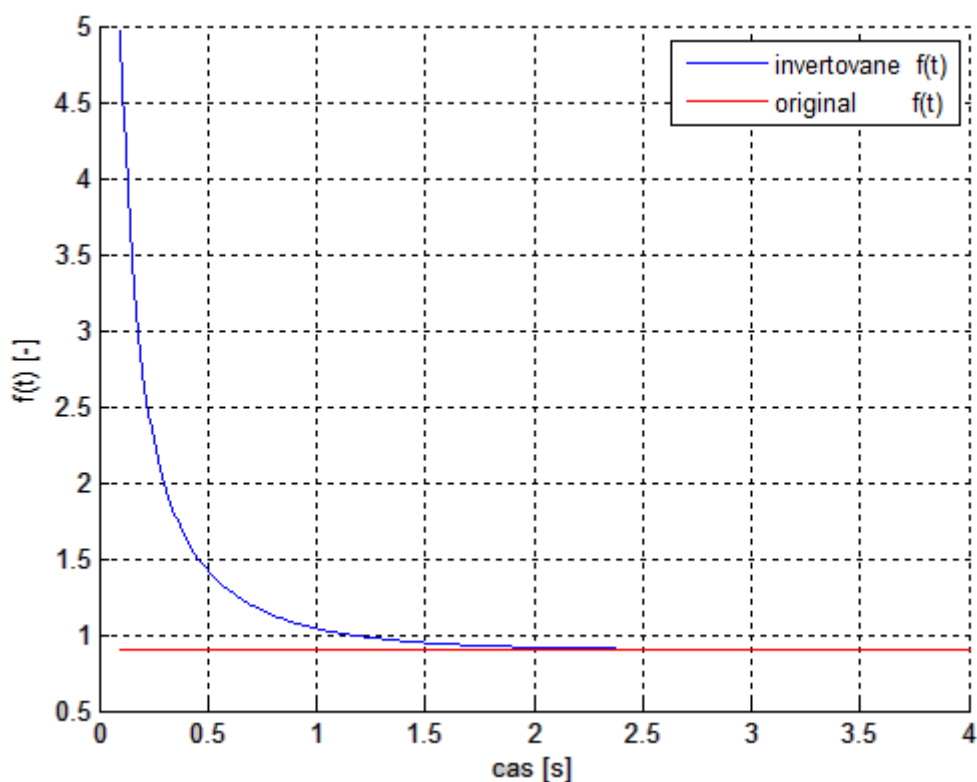
, kde  $\omega$  je úhlový kmitočet ( $\omega = 2\pi f$ , f je frekvence), l je délka vedení, m je libovolné celé číslo, ostatní veličiny jsou již známy z předchozích kapitol

#### 4.1.1 Testování Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel )

V této kapitole bude ukázána inverze pomocí Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro dva případy. První případ bude, pokud na vstup vedení bude připojeno napětí jednotkového skoku a v druhém případě, bude-li na vstup vedení připojen harmonický signál  $u_0(t) = \cos \omega t$ .

##### 1.) Na vstup vedení připojen jednotkový skok :

( rovnice (4.3) a (4.6) )



Obr. 23 Testování Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro  $c = 1$ ,  $N = 100$  a  $m = 10$ , délka vedení je  $l = 5\text{ m}$  a je zjištěn časový průběh napětí v bodě  $x = 4.5\text{ m}$

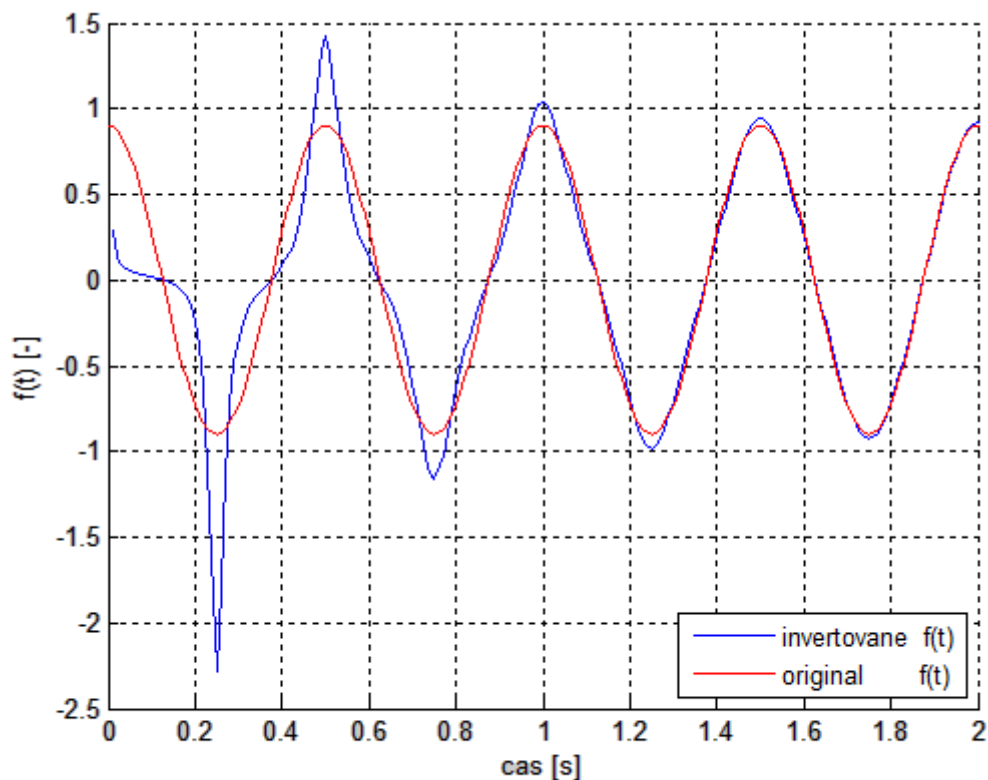
Hodnoty odporu a kapacity vedení byly zvoleny takto :  $R = 3\text{ k}\Omega$  a  $C = 8\text{ pF}$ , hodnoty svodu  $G$  a indukčnosti  $L$  jsou zanedbány. Modrá křivka naznačuje přibližování k funkci jednotkového skoku vynásobenou určitým poměrem, který udává poměr  $x/l$ . Toto je křivka invertované funkce (4.3). To, že dochází k prostému násobení funkce jednotkového skoku poměrem  $x/l$ , bylo zjištěno experimentálními pokusy, kdy při zachování všech ostatních hodnot, změně hodnoty  $x$  a následnému odečtení hodnoty pomocí maltabovských kurzorů ( pro  $x = 1, 2, 4.5, 5$  ) došlo k zjištění této skutečnosti.

Při hlubším zkoumání originálu funkce napětí rovnice (4.6) na vedení tohoto typu to lze vysvětlit tak, že část rovnice (4.6)  $e^{-\frac{m^2 \pi^2}{l^2 RC} t}$  nabývá tak malých hodnot, že jejím vynásobením ostatními členy v sumě rovnice (4.6) pak dojde k téměř úplnému vynulování ostatních hodnot a zbyde pouze člen  $x/l$ . To ale nevadí, protože cílem tohoto experimentu bylo zjistit, jak se bude chovat funkce vedení se zanedbatelnou indukčností a svodem spojené na jednom konci nakrátko při přivedení jednotkového skoku na vstup vedení ve zvoleném bodě  $x$  vedení délky  $l$  na Dubner-Abateho algoritmus.

## 2.) Na vstup vedení je připojen harmonický signál $\cos(\omega t)$ :

( rovnice (4.8 a 4.2 při  $U_0(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ , což je obraz kosinu )

Hodnoty parametrů vedení jsou shodné s hodnotami při testování v předchozím případě, kdy byl na vstup vedení přiveden jednotkový skok.



Obr. 24 Testování Dubner-Abateho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro  $c = 1$ ,  $N = 100$  a  $m = 10$ ,  $\omega = 4\pi$  délka vedení je  $l = 5\text{ m}$  a je zjištěn časový průběh napětí v bodě  $x = 4.5\text{ m}$

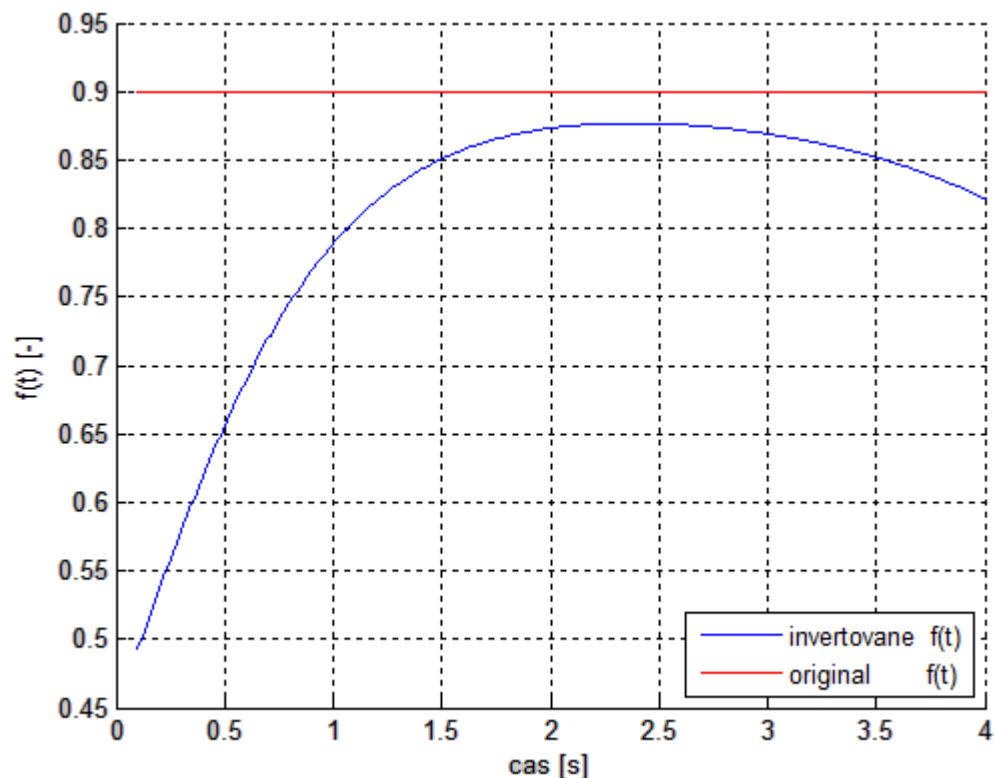


Obrázek 30 ukazuje situaci téměř stejnou, jako když byl Dubner-Abateho algoritmus testován na funkci goniometrické funkci sinus v kapitole 3.5. Modrá invertovaná křivka má zpočátku pro malé časy problémy s kopírováním originálu, to se dá opět zajistit zvýšením konstanty  $c$  opět na úkor větších časů, jak popisuje kapitola 3.5.

Je zřejmé, že amplitudu kosinu určuje opět poměr  $x/l$ , jako tomu bylo v předchozím případě. V následujících dvou ukázkách bude ukázáno pouze pro srovnání testování obou předchozích případů na Hosonově algoritmu a algoritmu založeném na Simpsonově pravidle.

#### 4.1.2 Testování Hosonoho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel )

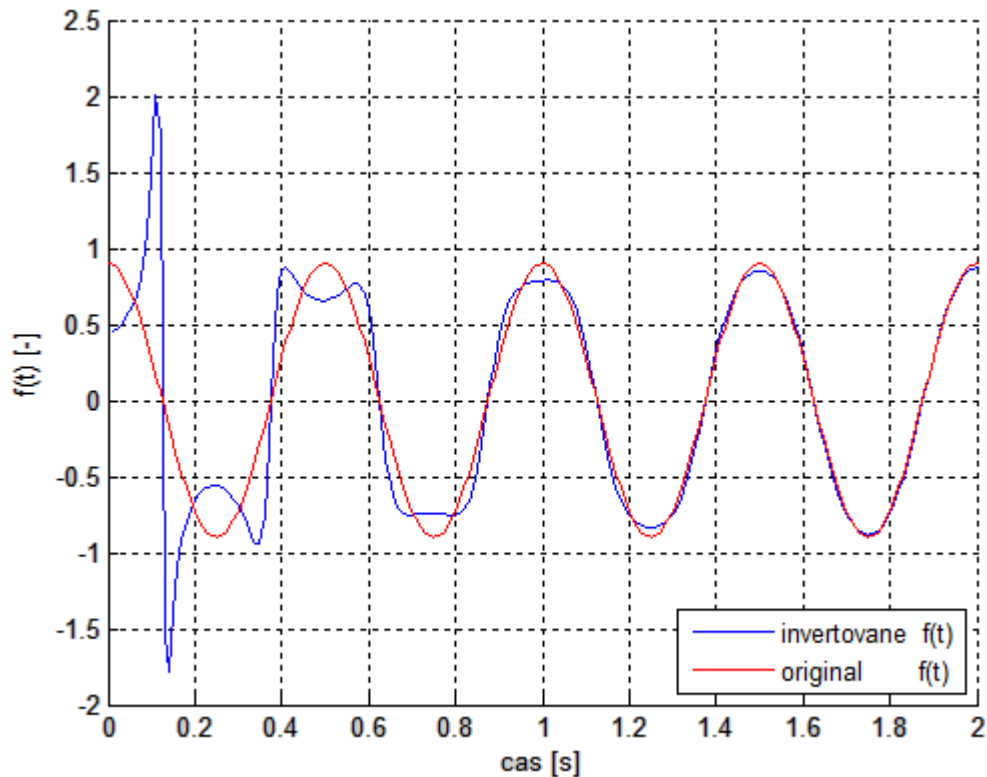
##### 1.) Na vstup vedení připojen jednotkový skok :



Obr. 25 Testování Hosonoho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro  $c = 1$ ,  $N = 100$  a  $m = 10$ ,  $\omega = 4\pi$  délka vedení je  $l = 5\text{m}$  a je zjištěn časový průběh napětí v bodě  $x = 4.5\text{ m}$

Na Obr. 31 je opět vidět, že Hosonoho algoritmus není až tak silná metoda, invertovaná funkce se ani nepřiblíží ke svému originálu a hned dochází k exponenciálnímu nárůstu. Řešením by mohla být opět jiná volba konstanty  $c$  a zvýšení počtu opakování algoritmu  $N$ .

2.) Na vstup vedení je připojen harmonický signál  $\cos(\omega t)$  :

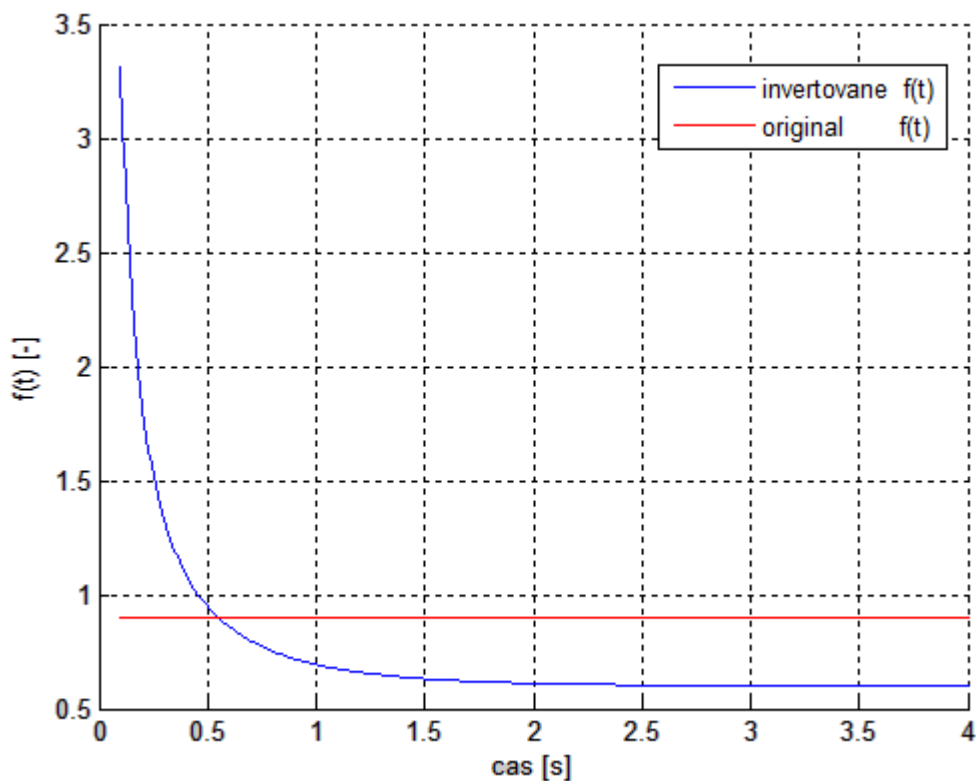


Obr. 26 Testování Hosonoho algoritmu na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro  $c = 1$ ,  $N = 100$  a  $m = 10$ ,  $\omega = 4\pi$  délka vedení je  $l = 5\text{ m}$  a je zjištěn časový průběh napětí v bodě  $x = 4.5\text{ m}$

Na Obr. 32 je vidět, že Dubner-Abateho algoritmus a Hosonoho mají téměř identické průběhy jako je ukázáno na Obr. 30. Je to dáno tvarem algoritmů, algoritmy jsou si hodně podobné, i když jsou založeny na lichoběžníkovém a obdélníkovém pravidle. Na goniometrické funkci to není až tak zřetelné.

### 4.1.3 Testování algoritmu založeného na Simpsonově pravidle na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko ( podzemní kabel )

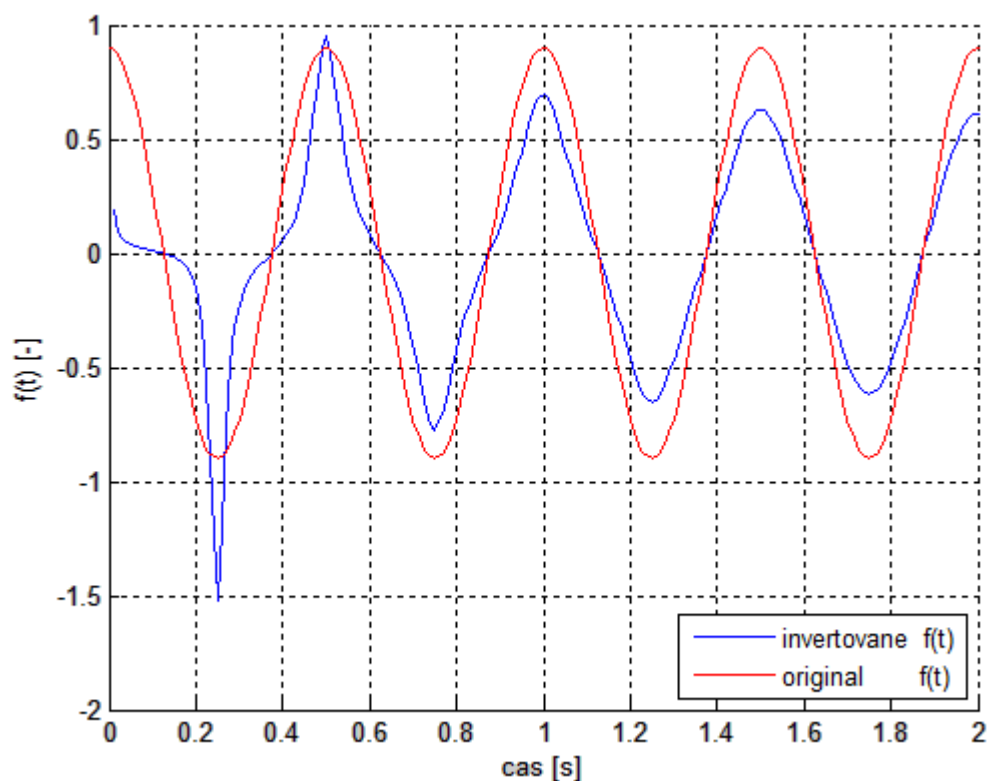
#### 1.) Na vstup vedení připojen jednotkový skok



Obr. 27 Testování algoritmu založeném na Simpsonově pravidle na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro  $c = 1$ ,  $N = 100$  a  $m = 10$ ,  $\omega = 4\pi$  délka vedení je  $l = 5\text{m}$  a je zjištěn časový průběh napětí v bodě  $x = 4.5\text{ m}$

Na Obr. 33 je vidět nedostatek algoritmu založeném na Simpsonově pravidle. Algoritmus totiž posouvá amplitudu invertované funkce od originálu v poměru 1.5/1. Čili dojde-li k vynásobení invertované funkce hodnotou 1.5, algoritmus založený na Simpsonově pravidle bude již ukazovat správnou hodnotu invertované funkce v porovnání s jejím originálem.

2.) Na vstup vedení je připojen harmonický signál  $\cos(\omega t)$



Obr. 28 Testování algoritmu založeném na Simpsonově pravidle na vedení se zanedbatelným svodem i indukčností spojené na jednom konci nakrátko pro  $c = 1$ ,  $N = 100$  a  $m = 10$ ,  $\omega = 4\pi$  délka vedení je  $l = 5\text{m}$  a je zjištěn časový průběh napětí v bodě  $x = 4.5\text{ m}$

Na Obr. 34 je vidět, že algoritmus založený na Simpsonově pravidle opět tlumí amplitudu invertované funkce. Zpočátku se algoritmus snaží přiblížit k originálu a kdyby byl testován pro větší časy, hodnota amplitudy invertované funkce by se ustálila na hodnotě menší než je amplituda originálu. Situace je stejná jako v kapitole 3.7.

## 5 ZÁVĚR

Začátek práce je soustředěn na popsání základů Laplaceovy transformace a její možnosti výpočtu. Jedná se o výpočet Bromwichova integrálu pomocí residuí, výpočet pomocí Laplaceova slovníku a nakonec Heavisideovy vzorce.

Další část práce je podrobněji zaměřena na odvození jednotlivých 3 hlavních algoritmů využívajícího numerický výpočet Laplaceovy transformace. Jedná se o algoritmy: Dubner-Abateho algoritmus, Hosonův algoritmus a algoritmus založený na Simpsonově pravidle.

Algoritmus založený na Simpsonově pravidle vykazoval velký nedostatek oproti Hosoho algoritmu nebo Dubner-Abateho a to, že tlumil amplitudu invertované funkce. I po několikanásobné kontrole odvozování tohoto algoritmu nedošlo k nalezení chyby. Může to být způsobeno tím, že Simpsonovo pravidlo není vhodné pro numerický výpočet inverzní Laplaceovy transformace.

Po prostudování jednotlivých numerických algoritmů byly provedeny některé simulace v prostředí Matlab. Nejprve byly testovány algoritmy na jednoduchých obrazech, jako je jednotkový skok nebo lineární funkce. Potom došlo k otestování výše zmíněných algoritmů na goniometrické funkci.

V poslední řadě byl představen obraz sdělovacího vedení, jedná se o vedení se zanedbatelným svodem a indukčností spojené na jednom konci nakrátko. Na jeho obrazu byly otestovány výše zmíněné algoritmy v prostředí Matlab.

Z uvedených otestovaných obrazů lze usoudit, že všechny testované algoritmy se hodí k invertování obrazů, které nejsou náročné na testování pro velké časy. Všechny testované algoritmy jsou náchylné na změnu konstanty  $c$ . Její volba je hodně důležitá. Vliv konstanty  $c$  je popsán v předešlých kapitolách.

Nejlepší z uvedených algoritmů po provedených testech je Dubner-Abateho, protože invertovaná funkce dokáže kopírovat originál mnohem déle než ostatní dva algoritmy. Hosonův algoritmus není až tak silný jako Dubner-Abateho.

# LITERATURA

- [1] Dubner, H., and J. Abate, 1968: Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. J. ACM, 15, p. 115-123.
- [2] André Angot : Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry. SNTL 1972 Praha, p.574-585
- [3] DUFFY, D. G. Transform methods for solving partial differential equations, 2/E. Chapman & Hall/CRC, 2004, p. 372-375, p. 65
- [4] The Laplace transform: Theory and Application, Joel L. Schiff, Springer, p. 2
- [5] MELKES, F. Matematika 2. Elektronické skriptum. Brno: FEKT VUT v Brně, 2005.
- [6] Přehled užití matematiky, Karel Rektorys, 2000.
- [7] Sedláček, J., Juraj Valsa Elektrotechnika II Elektrotechnické skriptum. Brno: FEKT VUT v Brně
- [8] Softwareová technologie a management, Laplaceova transformace dostupné na <http://moodle.dce.fel.cvut.cz/mod/resource/view.php?id=902&redirect...>

## SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$Z(s)$	Obraz impedance vedení
$\omega$	Úhlový kmitočet
$t$	Čas
$R$	Odpor vedení
$C$	Kapacita vedení
$G$	Vodivost vedení (svod)
$L$	Indukčnost vedení
$U_0(s)$	Vstupní napětí na vedení

# SEZNAM PŘÍLOH

[Příloha 1] CD s 3 testovacími algoritmy pro každý 3 příklady